BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE S.T.I.

Génie électronique – Génie électrotechnique – Génie optique

SUJET SORTI

SESSION 2005

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée 4 heures

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES DEUX EXERCICES ET LE PROBLÈME

* * * *

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation des calculatrices électroniques, programmables, alphanumériques ou à écran graphique **est autorisée**, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit fait usage d'aucune imprimante.
Chaque candidat ne peut utiliser qu'une seule machine sur sa table.
En cas de défaillance, elle pourra cependant être remplacée.
Cependant, les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que l'échange d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits.
(circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999)

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Exercice 1 (5 points)

1. Le nombre i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer P(2).

b) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que $P(z) = (z-2)(az^2 + bz + c)$.

c) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes **C** l'équation $P(z) = 0$.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ d'unité 5 cm.

a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + \mathrm{i}$, $z_C = 1 - \mathrm{i}$.

b) Déterminer le module et un argument de z_A, z_B et z_C.

c) Montrer que C est l'image de B par une rotation de centre 0 dont on précisera l'angle.

d) Déterminer les affixes des points I et J, milieux respectifs des segments $[OA]$ et $[BC]$.

e) Quelle est la nature du quadrilatère OBAC ? Justifier la réponse.

Exercice 2 (4 points)

1. On considère la fonction f définie sur l'ensemble **R** des nombres réels par

$f(x) = 3x - 1 + \frac{1}{e^{2x}}$.

a) Montrer que la fonction dérivée f' est telle que $f'(x) = \frac{3e^{2x} - 2}{e^{2x}}$.

b) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$, puis justifier l'existence d'un minimum et en donner la valeur exacte.

c) Dresser le tableau de variation de f (les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ ne sont pas demandées).

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 6x + 1$ où y est une fonction de la variable réelle x et y' sa dérivée.

a) Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.

b) Démontrer que la fonction g définie sur **R** par $g(x) = 3x - 1$ est solution de l'équation (E).

c) Vérifier que la fonction f est solution de (E) et que $f(0) = 0$.

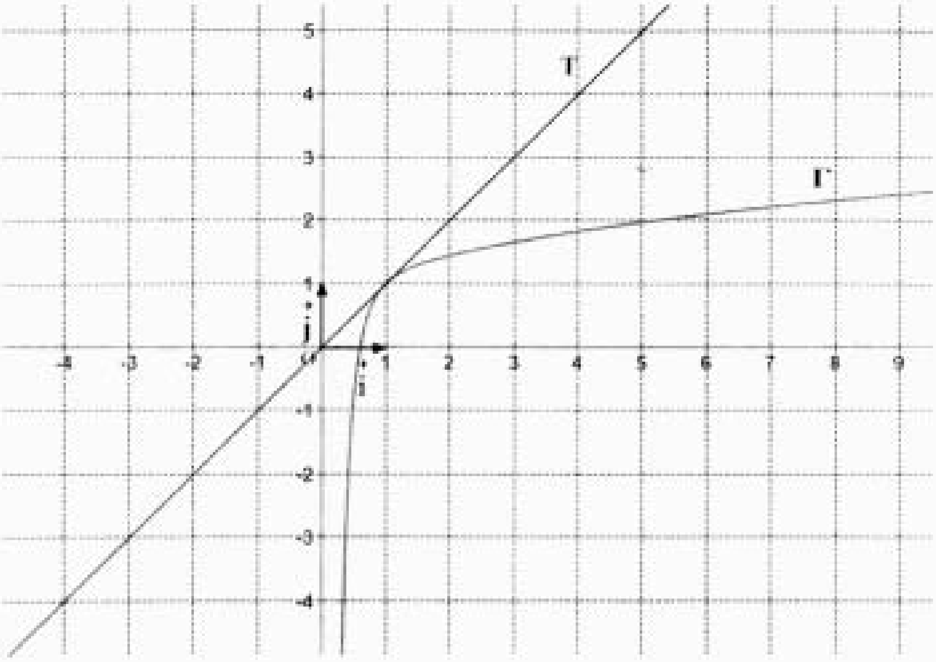
PROBLÈME (11 points)

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On donne dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ la représentation graphique Γ d'une fonction g, définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

La droite T passant par O et A $(1 ; 1)$ est tangente en A à la courbe Γ.

La courbe Γ admet pour asymptote verticale l'axe des ordonnées.



1. Déterminer graphiquement :

a) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ b) $g(1)$ c) $g'(1)$

2. On admet que, pour tout réel de l'intervalle $]0 ; +\infty[$,

$g(x) = \ln x + \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2}$, où a et b sont deux nombres réels.

a) Exprimer $g(1)$ et $g'(1)$ en fonction de a et b.

b) Déterminer a et b en utilisant les résultats précédents.

3. On suppose que g est définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln x + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0,2 ; 0,8]$; déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,01 et en déduire une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

b) En déduire, en utilisant le sens de variation de g, le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. **a)** Déterminer la limite de f en $+\infty$

b) Vérifier que l'on peut écrire, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$,

$$f(x)=\frac{e^x}{x}(x\ln x+1).$$

c) En déduire la limite de f en 0 (on admettra que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$).

2. **a)** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et vérifier que, pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=g(x)\,e^x$.

b) En utilisant le signe de g obtenu précédemment, étudier le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$.

3. **a)** Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

b) Sur la feuille annexe jointe, à rendre avec la copie, on a représenté la courbe $\mathscr{C}$. Sur cette figure, tracer la droite Δ.

Partie C : Calcul d'une aire

1. On note a un nombre réel tel que $0<a<1$.

a) Montrer que la fonction h, définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x)=e^x\ln x$ est une primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

b) En déduire que $\int_a^1 f(x)\,dx=-e^a\ln a$.

2. $\mathscr{D}$ désigne la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x=\frac{1}{2}$ et $x=1$.

a) Sur la feuille annexe, hachurer le domaine $\mathscr{D}$.

b) Calculer la valeur exacte de la mesure, exprimée en unités d'aire, de l'aire de $\mathscr{D}$.

FEUILLE ANNEXE