BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE S.T.I.

Génie électronique – Génie électrotechnique – Génie optique

SESSION 2004 **SUJET SORTI**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée 4 heures

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT
LES DEUX EXERCICES ET LE PROBLÈME

****

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation des calculatrices électroniques, programmables, alphanumériques ou à écran graphique **est autorisée**, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit fait usage d'aucune imprimante.
Chaque candidat ne peut utiliser qu'une seule machine sur sa table.
En cas de défaillance, elle pourra cependant être remplacée.
Cependant, les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'information par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits.
(circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999)

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Une feuille de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 (5 points)

Le nombre i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 4\sqrt{2}\,z + 16 = 0$$

2. a) On considère les nombres complexes :

$z_A = 4\text{i}$, $z_B = 2\sqrt{2}(1-\text{i})$ et $z_C = 2\sqrt{2}(1+\text{i})$.

Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres.

b) Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.
Placer dans le repère $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

3. À tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe z' par la formule $z' = e^{i\frac{3\pi}{4}} \times z$.

On définit la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.

a) Quelle est cette transformation ? Donner ses éléments caractéristiques.

b) Montrer que $z'_B = z_A$. Que peut-on en déduire pour les points A et B ?

c) Calculer z'_A sous forme $re^{i\theta}$ (avec $r > 0$), puis placer, dans le repère $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ le point D d'affixe $z_D = z'_A$.

d) Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 (4 points)

Un organisme de voyages prépare en Logoland un circuit de découverte qui doit passer une et une seule fois dans chacune des quatre villes notées respectivement I, L, O et Z.
Pour établir l'ordre des visites des villes, l'organisme doit tenir compte de deux impératifs :

- Le circuit ne peut partir que de I, L ou Z car la ville O ne possède pas d'aéroport international.
- La fin du voyage devant être en bord de mer, le circuit doit se terminer par I ou Z.

Un circuit possible est I, L, O et Z. Il sera noté (I, L, O, Z)
Un exemple de circuit impossible est I, O, Z, L. Il est noté (I, O, Z, L).

1. Expliquer pourquoi ce dernier circuit est impossible.

2. Déterminer les huit circuits possibles.

3. On choisit un circuit au hasard (chaque circuit a la même probabilité d'être choisi).
   a) Quelle est la probabilité pour que le circuit se termine à I ?

   b) Quelle est la probabilité pour que le circuit commence à L ?

4. L'agence de voyages s'intéresse au nombre de kilomètres parcourus en bus entre la ville de départ et la ville d'arrivée pour chaque circuit.
   Les distances exprimées en kilomètres entre les quatre villes sont indiquées dans le tableau suivant :

	L	I	Z	O
L	0	500	600	300
I	500	0	500	700
Z	600	500	0	600
O	300	700	600	0

Par exemple, on peut lire que la distance entre O et I est de 700 km.

On note X la variable aléatoire qui à chaque circuit associe le nombre de kilomètres parcourus.

a) En s'aidant du tableau fourni, déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

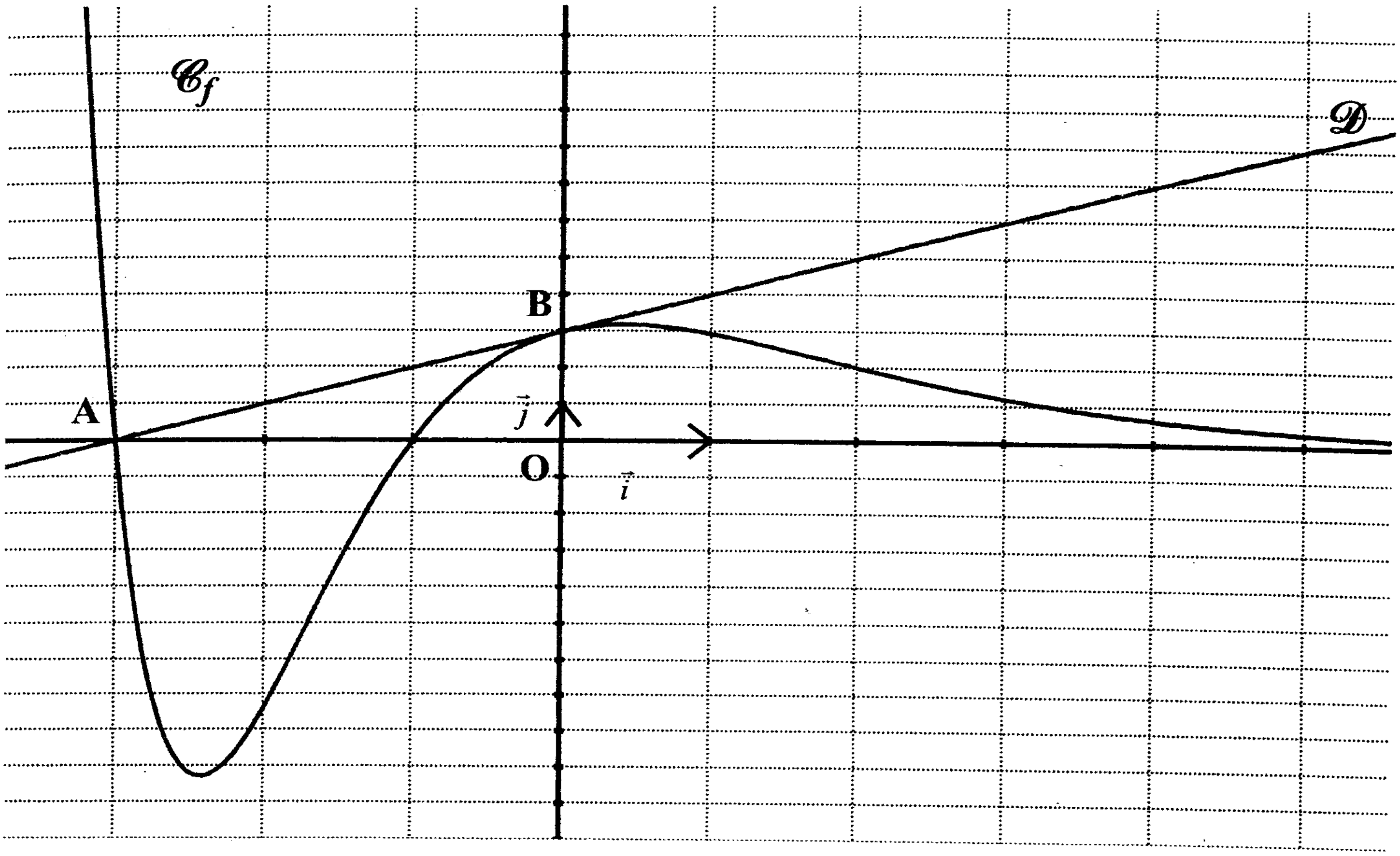
c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.

PROBLEME (11 points)

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur **R** par $f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^{-x}$ où a, b et c désignent trois nombres réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.



On admet que la droite $\mathscr{D}$ passe par A et est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.

1. a) À l'aide d'une lecture graphique, déterminer les coordonnées entières des points A et B. En déduire $f(-3)$ et $f(0)$.

   b) Montrer qu'une équation de la droite (AB) est : $y = x + 3$.
   En déduire la valeur de $f'(0)$.

2. a) Montrer que, pour tout x appartenant à **R**, $f'(x) = \left(-ax^2 + (2a-b)x + b - c\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   b) En déduire $f'(0)$, en fonction de b et c.

3. a) En utilisant les questions précédentes, montrer que les réels a, b et c sont solutions du système $\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ b - c = 1 \\ c = 3 \end{cases}$.

   b) Résoudre le système et en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie B

On suppose que f est définie sur **R** par

$$f(x) = (x^2 + 4x + 3)\,e^{-x}.$$

1. a) Vérifier que pour x différent de zéro, $f(x) = \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)x^2 e^{-x}$.

   b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. En déduire une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

   c) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2. a) Vérifier que pour tout x appartenant à **R**

$$f'(x) = (-x^2 - 2x + 1)\,e^{-x}.$$

   b) Pour tout x réel, étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

   c) Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'ordonnée de chacun des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique α pour x appartenant à l'intervalle $[-1\,;0]$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie C

1. Soit F la fonction définie sur **R** par $F(x) = (-x^2 - 6x - 9)\,e^{-x}$. Montrer que F est une primitive de f sur **R**.

2. En déduire une primitive G de la fonction g sur **R** définie par $g(x) = x + 3 - f(x)$.

3. On considère la partie du plan comprise entre la droite $\mathscr{D}$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 0$.

   On désigne par $\mathscr{A}$ la valeur, exprimée en cm², de l'aire de cette partie.
   Calculer $\mathscr{A}$.

BACCALAURÉAT, SÉRIES STI (toutes spécialités), F10B,
STL (spécialités physique de laboratoire et de procédés industriels chimie de laboratoire et de procédés industriels)

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2$

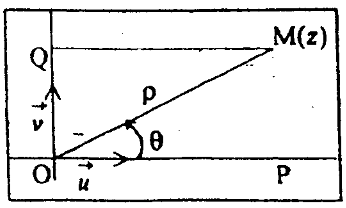
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z = x + iy$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}, \rho > 0$



$\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$

$\overline{OP} = x = \Re e(z) = \rho\cos\theta$

$\overline{OQ} = y = \Im m(z) = \rho\sin\theta$

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Opérations algébriques

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$

$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$; $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}'$

$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = (\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z||z'|$

$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'}e^{i(\theta - \theta')}$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*
(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

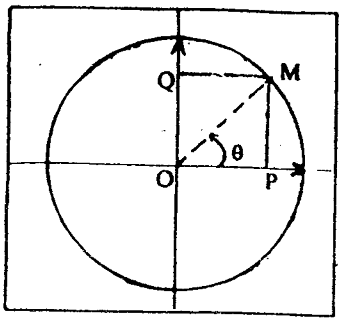
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

C. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}; \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad ; \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2a) \ ; \ \sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées
$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}\ ; \quad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n + 1$

STI STL 2

III. ANALYSE

A PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,
$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,
$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

2. *Suites* (SÉRIES STI, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)

Si $k > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = +\infty$; si $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty, +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Si $a \leqslant b$ et $m \leqslant f \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Equations	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$