BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE S.T.I.

Génie électronique – Génie électrotechnique – Génie optique

SUJET SORTI

SESSION 2008

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée 4 heures

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES DEUX EXERCICES ET LE PROBLÈME

* * * *

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation des calculatrices électroniques, programmables, alphanumériques ou à écran graphique **est autorisée**, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit fait usage d'aucune imprimante.
Chaque candidat ne peut utiliser qu'une seule machine sur sa table.
En cas de défaillance, elle pourra cependant être remplacée.
Cependant, les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que l'échange d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits.
(circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999)

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Deux feuilles de papier millimétré seront distribuées en même temps que le sujet.

EXERCICE 1 : (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation :

$$z^2+6\sqrt{3}z+36=0.$$

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A=-3\sqrt{3}+3i$ $\qquad z_B=-3\sqrt{3}-3i$ $\qquad$ et $\qquad z_C=-6\sqrt{3}$.

a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A et z_B.

b) Écrire le nombre complexe z_A sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

c) Placer les points A, B, C dans le plan muni du repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$.

3. **a)** Déterminer la nature du triangle ABC.

b) En déduire que le quadrilatère OACB est un losange.

4. On appelle K le point du plan complexe d'ordonnée négative tel que le triangle OAK soit rectangle et isocèle en O.
On note z_K l'affixe du point K.

a) Construire le point K sur la figure.

b) Par quelle rotation de centre O, le point K est-il l'image du point A ?

c) Écrire alors z_K sous la forme $re^{i\theta}$ (où r est un nombre réel strictement positif et θ un réel compris entre $-\pi$ et π) puis sous forme algébrique.

EXERCICE 2 : (4 points)

On considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) : y'' + 25y = 0$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur l'ensemble **R** des nombres réels, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation (E).

2. Soit f la fonction définie et dérivable sur **R**, dont on note f' la fonction dérivée, vérifiant les trois conditions suivantes :

- f est solution de l'équation différentielle (E) ;
- la courbe représentative de f dans un repère du plan passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{6} ; -2\right)$;
- $f'(0) = -5$.

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x$.

3. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = 2\cos\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$.

4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle sur $\left[0 ; \frac{\pi}{6}\right]$.

PROBLÈME : (11 points)

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ d'unités graphiques 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.
On s'intéresse dans ce problème à la fonction f définie sur l'ensemble **R** des nombres réels par

$$f(x)=\frac{3}{\mathrm{e}^{3x}+1}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

Partie A : Étude de la fonction f

1. **a)** Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

   c) Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout nombre réel x ; qu'en déduit-on sur la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à cette asymptote ?

2. On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=3$.

   a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

   b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite $\mathscr{D}$ comme asymptote.

   c) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x)=3-\dfrac{3\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}+1}$.

   d) En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)=\dfrac{-9\mathrm{e}^{3x}}{\left(\mathrm{e}^{3x}+1\right)^2}$.

   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur **R**, puis dresser son tableau de variation.

4. Déterminer une équation de la tangente Δ au point d'abscisse 0.

5. Dans le plan $\mathscr{P}$ muni du repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$, tracer les droites $\mathscr{D}$ et Δ ainsi que la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B : Calcul de l'aire d'une partie du plan

1. **a)** On considère la fonction g définie sur **R** par $g(x)=\dfrac{3\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}+1}$.

Déterminer une primitive G de la fonction g sur **R**. (On pourra remarquer que la fonction g est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ où u est une fonction que l'on précisera).

b) En utilisant la question 2.c de la partie A, déterminer une primitive F de la fonction f sur **R**.

2. Soit a un réel strictement positif.

On note $\mathscr{A}(a)$ la mesure, exprimée en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan $\mathscr{P}$ comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=a$.

a) Exprimer $\mathscr{A}(a)$ à l'aide d'une intégrale.

b) Établir que $\mathscr{A}(a)=3a-\ln\left(\mathrm{e}^{3a}+1\right)+\ln 2$.

c) En remarquant que $3a=\ln\left(\mathrm{e}^{3a}\right)$, écrire $\mathscr{A}(a)$ sous la forme du logarithme népérien d'un quotient ; déterminer alors la limite de $\mathscr{A}(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Dans cette question particulièrement, toute trace de recherche, même incomplète, figurant sur la copie sera prise en compte dans l'évaluation.

BACCALAURÉAT, SÉRIES STI (toutes spécialités), F10B,
STL (spécialités physique de laboratoire et de procédés industriels
chimie de laboratoire et de procédés industriels)

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(E(X)\right)^2$

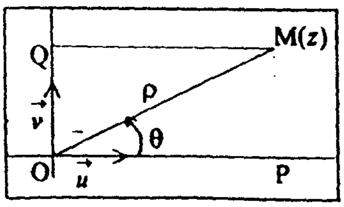
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z = x + i\,y$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = \rho e^{i\theta}, \rho > 0$



$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$

$\overline{OP} = x = \Re e(z) = \rho\cos\theta$

$\overline{OQ} = y = \Im m(z) = \rho\sin\theta$

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Opérations algébriques

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$

$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$; $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}'$

$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = \left(\rho e^{i\theta}\right)\left(\rho' e^{i\theta'}\right) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z||z'|$

$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*
(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

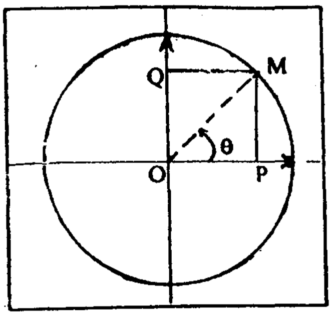
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; $a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$

C. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \;;\; \sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2a) \;;\; \sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2a)$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

D. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n+1$

III. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$ln\, 1 = 0$

$ln\, e = 1$

$ln\, ab = ln\, a + ln\, b$

$ln \frac{a}{b} = ln\, a - ln\, b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = exp\, x = e^x$ équivaut à $x = ln\, y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x\, ln\, a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$ln\, a^x = x\, ln\, a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha\, ln\, x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES*

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} ln\, x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln\, x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln\, x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} ln\, x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $ln(1 + x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

2. *Suites* (SÉRIES STI, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)

Si $k > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = +\infty$; si $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* **(Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)**

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty, +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u **à valeurs strictement positives**

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Si $a \leqslant b$ et $m \leqslant f \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$

STI STL 4