L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire N° 99-186 du 16 novembre 1999.

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

1 feuille de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats.

oo0oo

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES 2 EXERCICES ET LE PROBLÈME

EXERCICE 1 (6 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm, on considère les points B, C, D, E et F, images respectives des nombres complexes

$$z_B = 1 + i\sqrt{3},\quad z_C = 3 + i\sqrt{3},\quad z_D = 4,\quad z_E = 3 - i\sqrt{3} \text{ et } z_F = 1 - i\sqrt{3}.$$

1) Écrire les nombres complexes z_B, z_C, z_D, z_E et z_F sous forme trigonométrique.

2) Construire à la règle et au compas les points B, C, D, E et F dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

3) Calculer les distances OB, BC et CD. En déduire les distances DE, EF et OF. Que constate-t-on?

4) Calculer les mesures des angles $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DO}\right)$, $\left(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}\right)$ en radians.

5) Quelle est la nature du triangle OCD? Justifier la réponse.

6) Calculer les aires des triangles OCD et OBC.
En déduire, en cm^2, l'aire du polygone OBCDEF.

EXERCICE 2 (4 points)

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = x$, où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle x et y' sa dérivée.

1) Résoudre l'équation différentielle (H) : $y' + y = 0$.

2) Déterminer les deux nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax + b$ est solution de l'équation (E).

3) **a)** Le nombre k désignant une constante réelle, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ke^{-x} + x - 1$.

Vérifier que la fonction f est solution de l'équation (E).

b) Déterminer le réel k pour que $f(0) = 0$.

4) Dans cette question, on prend $k = 1$.

a) Calculer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.

b) En déduire une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

PROBLÈME (10 points)

PARTIE A : ***Étude d'une fonction auxiliaire***

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x(x+3) - 1$.

1) Déterminer la limite de g en $+\infty$ et la limite de g en $-\infty$.

2) Déterminer, à l'aide de la dérivée g', le sens de variation de g. En déduire le tableau de variation de g.

3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α qui appartient à l'intervalle $]-4\ ,\ 0[$.

4) Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ en fonction des valeurs de x.

PARTIE B : ***Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + (x+2)e^x$.

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
(Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées)

1) **a)** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe (C_f) en $-\infty$.

c) Étudier, en fonction des valeurs de x, les positions relatives de (D) et C_f.

2) En remarquant que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = e^x \left[\frac{-x}{e^x} + (x+2)\right]$ déterminer la limite de f en $+\infty$.

3) Vérifier que pour tout x réel, on a $f'(x) = g(x)$.

4) Dresser le tableau de variation de f.

5) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) en son point A d'abscisse 0.

6) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 10^{-2} près, puis une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

7) Tracer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C_f), la tangente (T) et l'asymptote (D).
(Utiliser la feuille de papier millimétré fournie)

PARTIE C : ***Calcul d'une aire.***

1) Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = (x+1)\,e^x$. Calculer $H'(x)$ puis en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre la courbe (C_f), l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = -2$ et l'axe des ordonnées. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.