L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire N° 99-186 du 16 novembre 1999.

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

oo0oo

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES 2 EXERCICES ET LE PROBLÈME

EXERCICE 1 (4 points)

Soit l'équation différentielle (E) : $4y'' + 9y = 0$, où y est une fonction de la variable t et y'' sa dérivée seconde.

1) Résoudre l'équation différentielle (E).

2) Trouver la fonction f, solution particulière de (E), vérifiant les conditions suivantes :

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

3) Vérifier que, pour tout réel t, $f(t) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$.

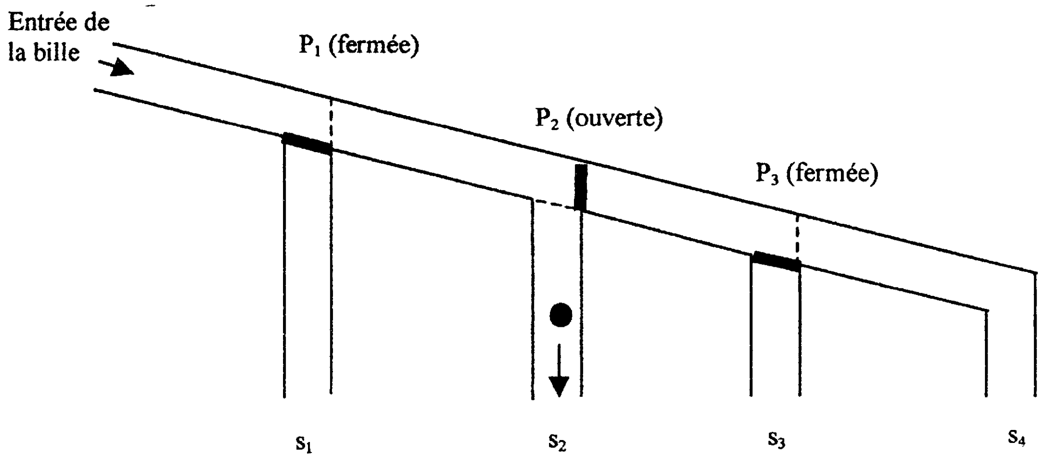
4) Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$.

EXERCICE 2 (4 points)

Un jeu de hasard consiste à introduire une bille dans le tube d'une machine.

Cette machine possède trois portes P_1, P_2 et P_3 qui ferment ou ouvrent les accès aux quatre sorties possibles s_1, s_2, s_3 et s_4.

Un système électronique positionne aléatoirement ces trois portes puis libère la bille.



NB: sur le schéma les portes P_1 et P_3 sont fermées, la porte P_2 est ouverte, la bille sortira par s_2.

1) Énumérer dans un tableau comme ci-dessous, en s'aidant éventuellement d'un arbre de choix, toutes les positions simultanées possibles des trois portes et indiquer la sortie imposée à la bille pour chacune de ces configurations.

P_1	P_2	P_3	Sortie
…….	…….		
F	O	F	s_2
…….	…….		

(Par convention on notera F une porte fermée et O une porte ouverte.)

2) On suppose que les huit événements élémentaires, trouvés à la question 1, sont équiprobables.

a) Soit A l'événement (F ; O ; F). Quelle est la probabilité $p(A)$ de l'événement A ?

b) Soit S_1 l'événement « la bille sort par s_1 », S_2 l'événement « la bille sort par s_2 »,

S_3 l'événement « la bille sort par s_3 », S_4 l'événement « la bille sort par s_4 » .

Calculer les probabilités $p(S_1)$, $p(S_2)$, $p(S_3)$ et $p(S_4)$ de chacun de ces événements.

3) Pour jouer, on doit miser 7 francs.

Si la bille sort par s_1, on ne reçoit rien. Si la bille sort par s_2, on reçoit 5 francs.

Si la bille sort par s_3, on reçoit 10 francs. Si la bille sort par s_4, on reçoit 20 francs.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque sortie possible, associe le gain ou la perte en francs du joueur (en tenant compte de la mise des 7 francs ; par exemple : à la sortie s_4, X associe 13)

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Présenter dans un tableau la loi de probabilité de X.

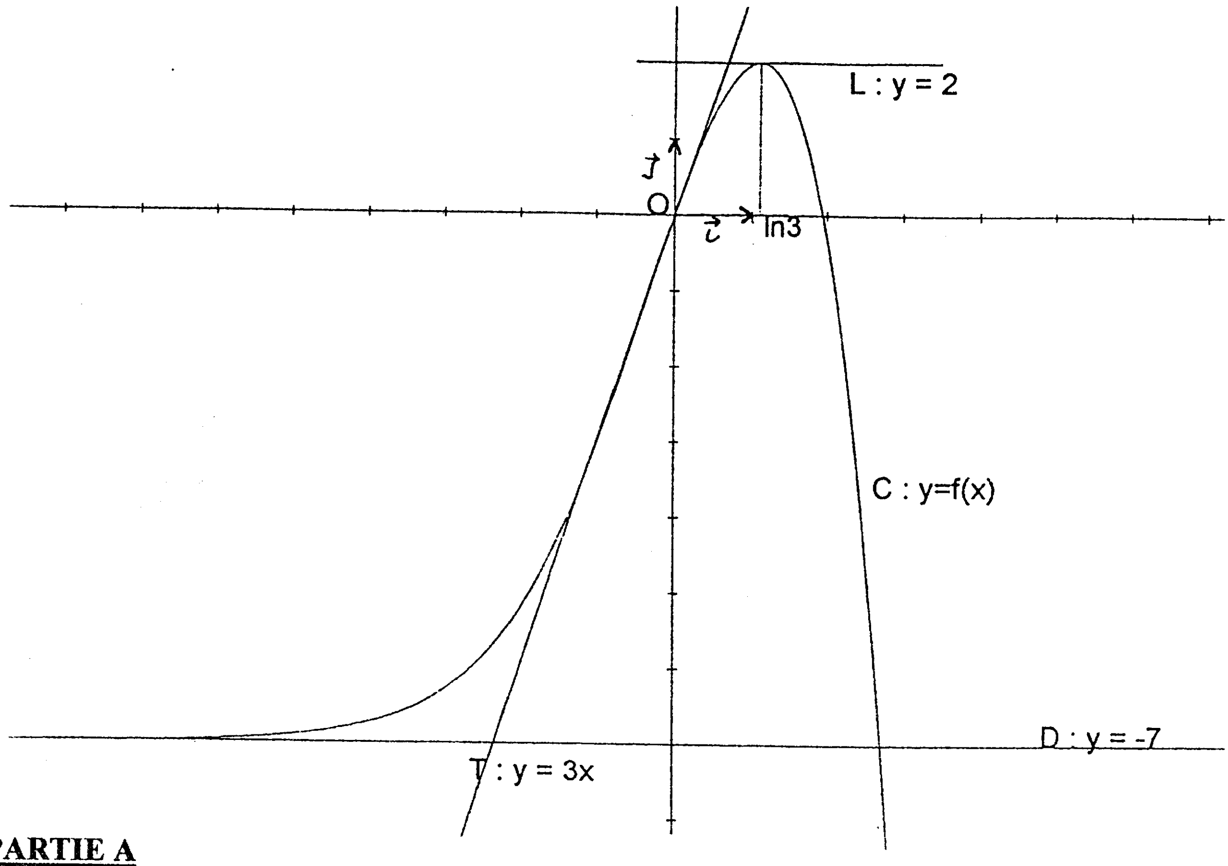
c) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.

4) On veut modifier la mise afin que le jeu soit équitable, c'est-à-dire que E(X) soit égal à zéro.

Déterminer cette nouvelle mise en justifiant la réponse.

PROBLÈME (12 points)

Sur le graphique ci-dessous, C est la courbe représentative, dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'une fonction f définie sur $\mathbf{R}$.



PARTIE A

La droite L, d'équation $y = 2$, est tangente à la courbe C au point d'abscisse $\ln 3$.

La droite T, d'équation $y = 3x$, est tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

La droite D, d'équation $y = -7$, est asymptote à la courbe C au voisinage de $-\infty$.

Déterminer, à l'aide de ces données, les réels suivants :

a) $f(0)$ et $f(\ln 3)$

b) $f'(0)$ et $f'(\ln 3)$

c) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

PARTIE B

On admet que, pour tout réel x, $f(x) = a\mathrm{e}^x + b + \dfrac{c}{\mathrm{e}^x + 1}$ où a, b et c sont des constantes réelles.

1) a) Déterminer en fonction des réels a, b et c, les nombres suivants :

$f(0)$; $f(\ln 3)$; $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

b) En déduire un système d'équations vérifiées par a, b, et c.

Résoudre ce système et en déduire que $f(x) = -\mathrm{e}^x + 9 - \dfrac{16}{\mathrm{e}^x + 1}$.

MAI3ME

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3) **a)** Calculer $f'(x)$, pour tout réel x.

b) Vérifier que, pour tout réel x : $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x+5)(3-e^x)}{(e^x+1)^2}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f.

PARTIE C

On rappelle que $f(x) = -e^x + 9 - \dfrac{16}{e^x+1}$ pour tout réel x.

1) Vérifier que, pour tout réel x : $f(x) = -e^x - 7 + 16\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

2) **a)** Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe C avec la droite D d'équation $y = -7$.

b) Étudier la position de D par rapport à C.

3) Soit F la fonction définie sur **R** par : $F(x) = 16\ln(e^x+1) - e^x - 7x$.

a) Montrer que F est une primitive de f.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\mathcal{A} = \int_0^{\ln 15} \left(f(x)+7\right) dx$.

c) Interpréter géométriquement l'intégrale $\mathcal{A}$.