

Exercice 1

Un moteur électrique possédant trois bornes B_1 , B_2 et B_3 doit être alimenté en électricité par trois fils F_1 , F_2 et F_3 , chaque fil étant relié à une seule borne identifiée.

Lorsque les trois fils sont convenablement branchés (F_1 avec B_1 , F_2 avec B_2 , F_3 avec B_3), le moteur tourne à 500 tours par minute.

Lorsqu'aucun fil n'est branché à la bonne borne, le moteur ne tourne pas.

1. Déterminer la liste des montages différents possibles et en déduire leur nombre total (exemple : F_1 avec B_2 , F_2 avec B_1 , F_3 avec B_3 est l'un des montages possibles)
2. Calculer la probabilité que les trois fils soient convenablement branchés.
3. Calculer la probabilité qu'un seul des trois fils soit branché à la bonne borne (les deux autres fils étant inversés).
4. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque montage, associe la vitesse de rotation du moteur.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Exercice 2

Un quadripôle est constitué d'un résistor de résistance R exprimée en Ω et d'un condensateur de capacité C exprimée en μF . On associe respectivement à la tension d'entrée et à la tension de sortie les nombres complexes Z_e et Z_s .

On appelle transmittance le nombre complexe Z défini par : $Z = \frac{Z_s}{Z_e}$.

On admet que $Z = \frac{1}{1 + iRC\omega}$ où ω désigne la pulsation exprimée en radians par seconde et i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Dans tout cet exercice, on suppose que $R = 50\Omega$, $C = 2\mu F$ et $\omega = \frac{1}{100} \text{rad.s}^{-1}$.

1. Vérifier que $Z = \frac{1}{1 + i}$; écrire le nombre complexe Z sous forme algébrique puis déterminer le module et un argument de Z .
2. Le module de Z_s peut-il être le double de celui de Z_e ? Justifier la réponse fournie.
3. Dans cette question seulement, on suppose qu'un argument de z_s est $\frac{\pi}{2}$; déterminer alors un argument de Z_e .
4. On suppose dans cette question que $Z_e = 150(-\sqrt{3} + i)$.
 - (a) Déterminer l'écriture du nombre complexe Z_e sous la forme $re^{i\alpha}$.
 - (b) Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe Z_s correspondant.
 - (c) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(0; \vec{u}, \vec{v})$ de telle manière qu'un centimètre représente 100 unités. Placer les points M_s et M_e images respectives des nombres complexes Z_e et Z_s .

Problème

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0; +\infty[$.

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle I par : $g(x) = x^2 + 3 - 2 \ln x$.

1. (a) On note g' la dérivée de la fonction g ; calculer $g'(x)$ et étudier son signe, pour x appartenant à l'intervalle I .
(b) Dresser le tableau de variations de la fonction g .
Les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$ ne sont pas demandées.
2. Calculer $g(1)$, en déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle I .

PARTIE B

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par : $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I et \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(0; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm.
 2. (a) Étudier la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe \mathcal{C} .
(b) Étudier la limite de f en $+\infty$.
 3. (a) Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle I , $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.
(b) Déduire de la partie A le signe de $f'(x)$ puis le sens de variation de f sur l'intervalle I .
(c) Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle I .
 4. Soit \mathcal{D} la droite d'équation : $y = \frac{1}{2}x$.
 - (a) Montrer que la droite \mathcal{D} est asymptote à la courbe \mathcal{C} .
 - (b) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection E de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D} .
 - (c) Sur l'intervalle I , déterminer la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à la droite \mathcal{D} .
 5. En utilisant les résultats précédents, tracer avec soin dans le même repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$ la droite \mathcal{D} et la courbe \mathcal{C} .

PARTIE C

1. On considère la fonction h définie sur l'intervalle I par : $h(x) = \frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x}$.
En remarquant que $\frac{\ln x}{x}$ est de la forme $u'(x) \times u(x)$, déterminer une primitive de la fonction h sur l'intervalle I .
2. Hachurer sur le graphique la partie du plan limitée par la courbe \mathcal{C} , la droite \mathcal{D} et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e^{\frac{1}{2}}$.
Calculer l'aire exprimée en cm^2 , de cette partie hachurée.