

EXERCICE 1

3 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n + 2n + 3 \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
2.
 - a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$.
 - b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Conjecturer une expression de u_n , en fonction de n , puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $(1 + i)^6 = -8i$.
2. On considère l'équation (E) : $z^2 = -8i$.
 - a. Dédire de 1. une solution de l'équation (E).
 - b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.
3. Dédire également de 1. une solution de l'équation (E') $z^3 = -8i$.
4. On considère le point A d'affixe $2i$ et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
 - a. Déterminer l'affixe b du point B, image de A par r , ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r .
 - b. Montrer que b et c sont solutions de (E').
5.
 - a. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique 2 cm), représenter les points A, B et C.
 - b. Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions?
 - c. Déterminer le centre de gravité de cette figure.

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x - 1) \left(1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1} \right) = x^k - 1.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2.
 - a. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$.
Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

- b. Dédurre de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.
3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur pgcd.
- a. On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bezout à m' et n' , montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que : $mu - nv = d$.
- b. On suppose u et v strictement positifs.
Montrer que : $(a^m - 1) - (a^{nv} - 1) a^d = a^d - 1$.
Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le pgcd de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.
- c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le pgcd de $2^{63} - 1$ et de $2^{60} - 1$.

EXERCICE 3**4 points****Commun à tous les candidats**

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 1/2 point l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne le point $S(1; -2; 0)$ et le plan P d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point S et perpendiculaire au plan P est :

$$A: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-2t \\ z = -3 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad B: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = 1-3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$C: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2-2t \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad D: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = -3-3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P sont :

$$A: (-4; 0; 0) \quad B: \left(\frac{6}{5}; \frac{-9}{5}; \frac{3}{5}\right) \quad C: \left(\frac{7}{9}; \frac{-2}{3}; \frac{1}{3}\right) \quad D: \left(\frac{8}{11}; \frac{-25}{11}; \frac{9}{11}\right)$$

3. La distance du point S au plan P est égale à :

$$A: \frac{\sqrt{11}}{3} \quad B: \frac{3}{\sqrt{11}} \quad C: \frac{9}{\sqrt{11}} \quad D: \frac{9}{11}$$

4. On considère la sphère de centre S et de rayon 3. L'intersection de la sphère S et du plan P est égale

A: au point I(1; -5; 0)

B: au cercle de centre H et de rayon $r = 3\sqrt{\frac{10}{11}}$

C: au cercle de centre S et de rayon $r = 2$

D: au cercle de centre H et de rayon $r = \frac{3\sqrt{10}}{11}$.

EXERCICE 4**4 points**

Commun à tous les candidats

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est

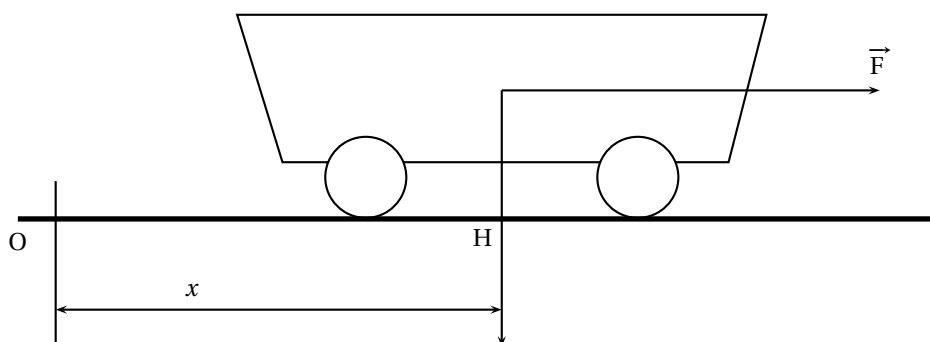
$$p([0 ; t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0 ; 200]) = 0,5$.

1. Montrer que $\lambda = \frac{\ln 2}{200}$.
2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.
3. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx$.

a. Montrer que $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

- b. En déduire d_m on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale? la semaine près.

Exercice 5**4 points****Commun à tous les candidats**

Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante \vec{F} de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue $25 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}$.

La position du chariot est repérée par la distance x , en mètres, du point H? l'origine O du repère en fonction du temps t , exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement

$$(E) \quad 25x' + 200x'' = 50, \text{ où}$$

x' est la dérivée de x par rapport au temps t ,

x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t .

1. On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$.
Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) $v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$.
Résoudre l'équation différentielle (F).
2. On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.
 - a. Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.
 - b. En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif, $x(t) = 2t - 16 + 16e^{-t/8}$.
3. Calculer $V = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale? 90 % de sa valeur limite V ?
4. Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.