

**SUJET**  
**2** **SUJET**

♦ D'APRÈS LIBAN ♦ JUIN 2003

**Avant de commencer****EXERCICE 1**● **Thèmes du programme**

Probabilités ; loi binomiale ; événements indépendants.

Raisonnement par récurrence.

Limite d'une suite

● **Analyse de l'exercice**Étude d'une série de  $n$  tirages successifs et indépendants dans une urne.

La première question étudie quelques cas particuliers et prépare le candidat à la généralisation, traitée ensuite.

L'exercice se termine par l'étude d'une suite. Il est indispensable de bien étudier le texte, en particulier la définition de  $p_n$ .**EXERCICE 2**● **Thèmes du programme**

Fonction exponentielle ; théorème des valeurs intermédiaires ; asymptote ; calcul d'aire ; intégration par parties ; suites.

● **Analyse de l'exercice**

Un sujet d'analyse très classique, en quatre parties :

– Étude d'une fonction auxiliaire (partie A), qui permettra l'étude de la fonction principale  $f$  (partie B).– Calcul d'aire, avec une petite difficulté puisque la fonction  $f$  est négative sur l'intervalle considéré (partie C).

– Enfin, étude d'une suite (partie D) avec interprétation géométrique du résultat.

**EXERCICE 3**● **Thèmes du programme**

Nombres complexes :

– Résolution d'une équation du second degré à coefficients réels.

– Interprétation complexe d'une translation, une homothétie et une rotation.

– Étude d'une configuration.

● **Analyse de l'exercice**

Un exercice simple qui permet une bonne révision des bases du programme sur les nombres complexes. On y rencontre en particulier les trois transformations au programme.

Le candidat qui connaît son cours doit pouvoir le traiter sans hésitation.

**Exercice 1** (5 points)

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète  $n$  fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis à la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.On note  $p_n$  la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des  $n - 1$  premiers tirages et une boule blanche lors du  $n$ -ième tirage.**1.** Calculer les probabilités  $p_2$ ,  $p_3$  et  $p_4$ .

2. On considère les événements suivants :

$B_n$  : « On tire une boule blanche lors du  $n$ -ième tirage »,

$U_n$  : « On tire une boule blanche et une seule lors des  $n - 1$  premiers tirages ».

a. Calculer la probabilité de l'événement  $B_n$ .

b. Exprimer la probabilité de l'événement  $U_n$  en fonction de  $n$ .

c. En déduire l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$  et vérifier l'égalité :  $p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

3. On pose  $S_n = p_2 + p_3 + \dots + p_n$ .

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :  $S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

b. Déterminer la limite de la suite  $(S_n)$ .

On note  $p_n$  la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des  $n - 1$  premiers tirages et une boule blanche lors du  $n$ -ième tirage.

1. Calculer les probabilités  $p_2$ ,  $p_3$  et  $p_4$ . (1,5 point)

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

2. On considère les événements suivants :

$B_n$  : « On tire une boule blanche lors du  $n$ -ième tirage »,

$U_n$  : « On tire une boule blanche et une seule lors des  $n - 1$  premiers tirages ».

a. Calculer la probabilité de l'événement  $B_n$ . (0,5 point)

---

---

b. Exprimer la probabilité de l'événement  $U_n$  en fonction de  $n$ . (0,75 point)

---

---

---

---

c. En déduire l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$  et vérifier l'égalité :  $p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ . (1 point)

3. On pose :  $S_n = p_2 + p_3 + \dots + p_n$ .

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :  $S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ . (1 point)

b. Déterminer la limite de la suite  $(S_n)$ . (0,5 point)

**Exercice 2** (10 points)**Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire  $g$** 

La fonction  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2e^x + 2x - 7$ .

1. Étudier les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2. Étudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser son tableau de variation.
3. Justifier que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une solution unique  $\alpha$  telle que  $0,94 < \alpha < 0,941$ .
4. Étudier le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Partie B : Étude d'une fonction  $f$** 

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Étudier le signe de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Étudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
3. Calculer  $f'(x)$ , où  $f'$  désigne la fonction dérivée de  $f$ , et vérifier que  $f'(x)$  et  $g(x)$  ont le même signe. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

4. a. Démontrer l'égalité :  $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$ .

b. Étudier le sens de variation de la fonction  $h : x \mapsto \frac{(2x - 5)^2}{2x - 7}$  sur l'intervalle  $\left] -\infty; \frac{5}{2} \right[$ .

En déduire, à partir de l'encadrement de  $\alpha$  obtenu dans la partie A, un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $f(\alpha)$ .

5. Démontrer que la droite  $\mathcal{D}$ , d'équation  $y = 2x - 5$ , est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .

Préciser la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\mathcal{D}$ .

6. Tracer la droite  $\mathcal{D}$  et la courbe  $\mathcal{C}$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2 cm).

**Partie C : Calcul d'aire**

À l'aide d'une intégration par parties, calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire  $\mathcal{A}$  de la portion de plan délimitée par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = \frac{5}{2}$ .

**Partie D : Étude d'une suite de rapports de distances**

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, on considère les points  $A_n$ ,  $B_n$  et  $C_n$ , d'abscisse  $n$ , appartenant respectivement à l'axe des abscisses, à la droite  $\mathcal{D}$  et à la courbe  $\mathcal{C}$ ; soit  $u_n$  le réel défini par  $u_n = \frac{C_n B_n}{A_n B_n}$ .

1. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, on a :  $u_n = \frac{2n - 5 - f(n)}{2n - 5}$ .

2. a. Quelle est la nature de la suite  $(u_n)$  ?

b. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ . Pouvait-on prévoir ce résultat ?

**Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire  $g$** 

La fonction  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2e^x + 2x - 7$ .

1. Étudier les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ . (0,5 point)

---



---



---

2. Étudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser son tableau de variation. (0,5 point)

---

---

---

---

---

---

---

---

3. Justifier que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une solution unique  $\alpha$  telle que :  $0,94 < \alpha < 0,941$ . (0,75 point)

---

---

---

---

---

---

---

---

4. Étudier le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ . (0,25 point)

---

---

---

---

### Partie B : Étude d'une fonction $f$

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Étudier le signe de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . (0,5 point)

---

---

---

---

---

---

---

---

2. Étudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ . (0,5 point)

---

---

---

---

3. Calculer  $f'(x)$ , où  $f'$  désigne la fonction dérivée de  $f$ , et vérifier que  $f'(x)$  et  $g(x)$  ont le même signe. Dresser le tableau de variation de  $f$ . (0,75 point)

---

---

---

---

---

---

---

---

4. a. Démontrer l'égalité :  $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$ . (0,5 point)

---

---

---

---

---

---

---

---

b. Étudier le sens de variation de la fonction  $h : x \mapsto \frac{(2x - 5)^2}{2x - 7}$  sur l'intervalle  $] -\infty ; \frac{5}{2} [$ .

En déduire, à partir de l'encadrement de  $\alpha$  obtenu dans la partie A, un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $f(\alpha)$ . (1 point)

---

---

---

---

---

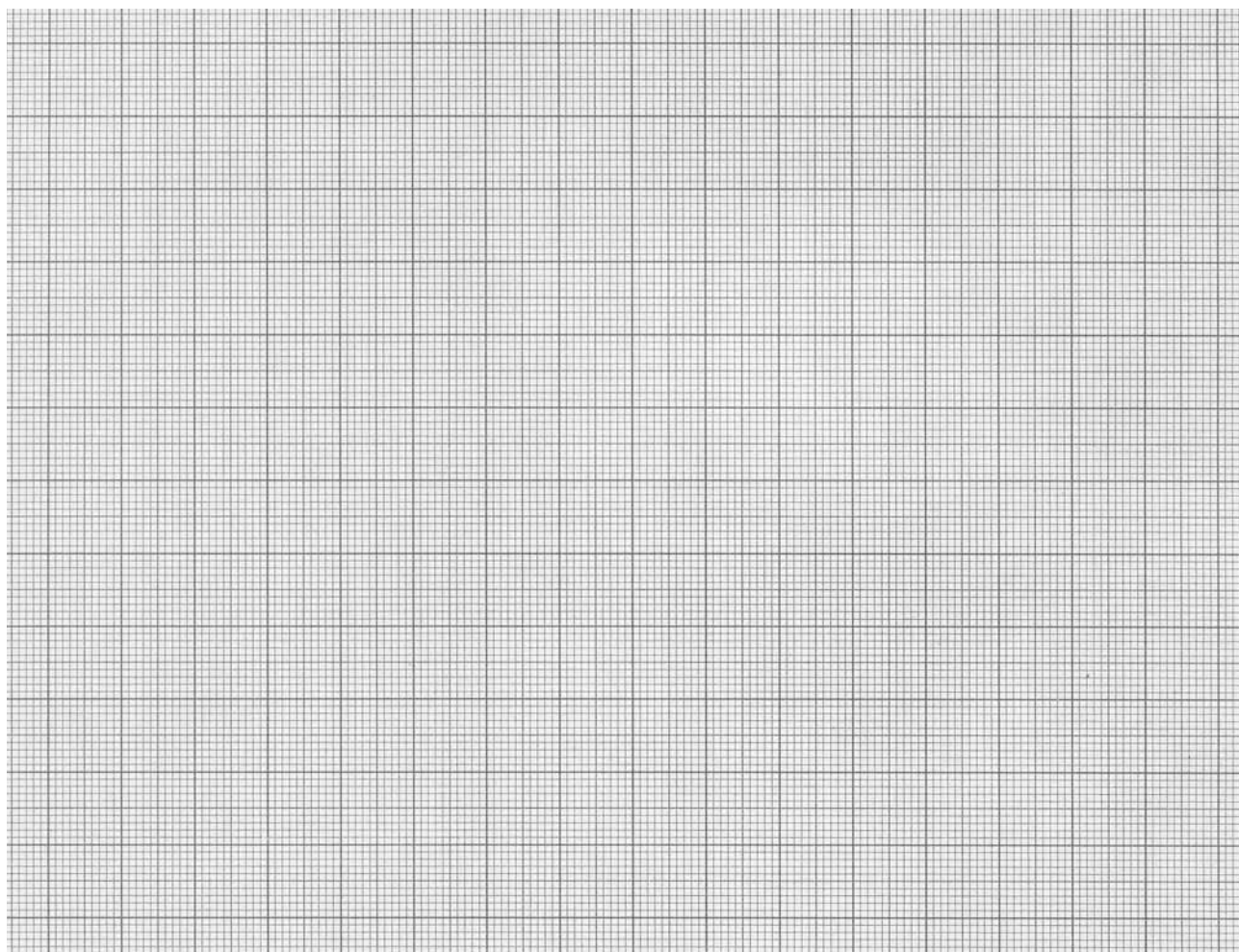
---

---

---

5. Démontrer que la droite  $\mathcal{D}$ , d'équation  $y = 2x - 5$ , est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .  
Préciser la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\mathcal{D}$ . (0,75 point)

6. Tracer la droite  $\mathcal{D}$  et la courbe  $\mathcal{C}$  dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2 cm) (0,5 point)







**b.** Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ . Pouvait-on prévoir ce résultat ? (0,5 point)

---

---

---

---

---

---

---

### Exercice 3 (5 points)

**1.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $4z^2 - 12z + 153 = 0$ .

**2.** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives :  $z_A = \frac{3}{2} + 6i$ ,  $z_B = \frac{3}{2} - 6i$ ,  $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$ ,  $z_P = 3 + 2i$ , et le vecteur  $\vec{w}$  d'affixe :  $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$ .

**a.** Déterminer l'affixe  $z_Q$  du point Q, image du point B par la translation  $t$  de vecteur  $\vec{w}$ .

**b.** Déterminer l'affixe  $z_R$  du point R, image du point P par l'homothétie  $h$  de centre C et de rapport  $-\frac{1}{3}$ .

**c.** Déterminer l'affixe  $z_S$  du point S, image du point P par la rotation  $r$  de centre A et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

**d.** Placer les points P, Q, R et S.

**3. a.** Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

**b.** Calculer  $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$ . En déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.

**c.** Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté  $\mathcal{C}$ . On calculera l'affixe de son centre  $\Omega$  et son rayon  $\rho$ .

**4.** La droite (AP) est-elle tangente au cercle  $\mathcal{C}$  ?

---

**1.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $4z^2 - 12z + 153 = 0$ . (0,5 point)

---

---

---

---

---

**2.** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives :  $z_A = \frac{3}{2} + 6i$ ,  $z_B = \frac{3}{2} - 6i$ ,  $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$ ,  $z_P = 3 + 2i$ , et le vecteur  $\vec{w}$  d'affixe :  $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$ .

**a.** Déterminer l'affixe  $z_Q$  du point Q, image du point B par la translation  $t$  de vecteur  $\vec{w}$ . (0,5 point)

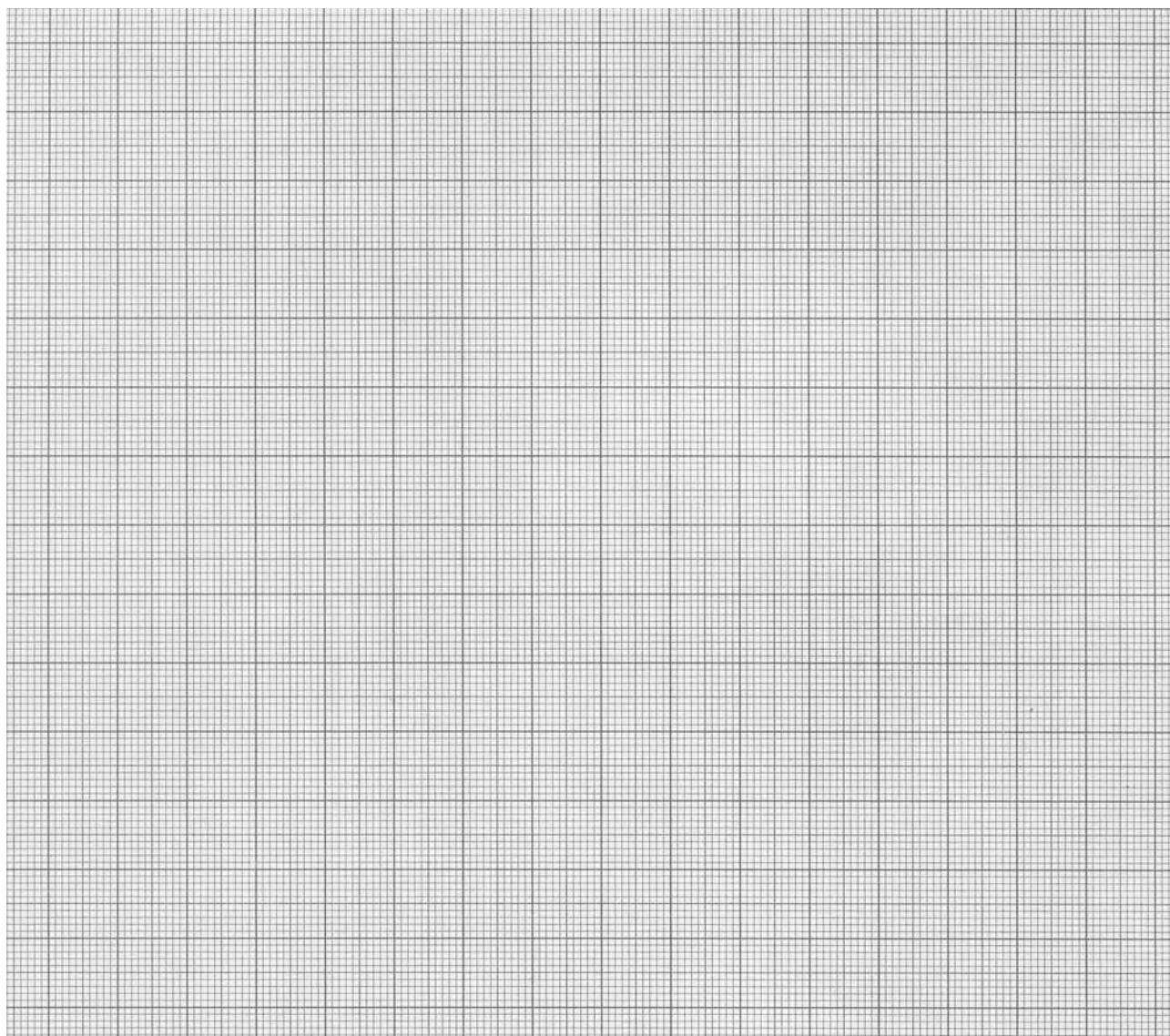
---

---

b. Déterminer l'affixe  $z_R$  du point R, image du point P par l'homothétie  $h$  de centre C et de rapport  $-\frac{1}{3}$ . (0,5 point)

c. Déterminer l'affixe  $z_S$  du point S, image du point P par la rotation  $r$  de centre A et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ . (0,5 point)

d. Placer les points P, Q, R et S.



3. a. Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme. (0,5 point)

---

---

---

---

b. Calculer  $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$ . En déduire la nature précise du parallélogramme PQRS. (0,75 point)

---

---

---

---

---

---

c. Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté  $\mathcal{C}$ . On calculera l'abscisse de son centre  $\Omega$  et son rayon  $\rho$ . (0,5 point)

---

---

---

---

---

---

4. La droite (AP) est-elle tangente au cercle  $\mathcal{C}$  ? (0,75 point)

---

---

---

---

---

---

SUJET  
2

## CORRIGÉ

## Exercice 1

1. On note  $B_k$  l'événement « tirer une boule blanche en  $k$ -ième tirage » et  $N_k$  l'événement « tirer une boule noire au  $k$ -ième tirage ».

$p_2 = p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \times p(B_2)$  car les tirages sont indépendants.

L'urne contient 6 boules dont 2 boules blanches. Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées donc

$$p(B_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Comme on remet la boule dans l'urne après tirage, pour tout  $k \geq 1$ ,  $p(B_k) = \frac{1}{3}$ . D'où  $p_2 = \frac{1}{9}$ .

$p_3 = p((B_1 \cap N_2 \cap B_3) \cup (N_1 \cap B_2 \cap B_3))$ . Les événements  $(B_1 \cap N_2 \cap B_3)$  et  $(N_1 \cap B_2 \cap B_3)$  sont incompatibles, d'où  $p_3 = p(B_1 \cap N_2 \cap B_3) + p(N_1 \cap B_2 \cap B_3)$ .

Par indépendance des tirages,  $p_3 = p(B_1) \cdot p(N_2) \cdot p(B_3) + p(N_1) \cdot p(B_2) \cdot p(B_3)$ .

Or, pour tout  $k \geq 1$ ,  $p(N_k) = \frac{2}{3}$ . D'où  $p_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) \times 2$ .

$$p_3 = \frac{4}{27}.$$

$$p_4 = [(B_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap B_4) \cup (N_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap B_4) \cup (N_1 \cap N_2 \cap B_3 \cap B_4)].$$

En raisonnant comme ci-dessus, on obtient :

$$p_4 = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$p_4 = \frac{4}{27}.$$

$$2. \text{ a. } p(B_n) = \frac{1}{3}.$$

b. On considère la suite des  $n - 1$  premiers tirages. Ces tirages sont effectués de manière indépendante, dans des conditions identiques. Chacun de ces tirages a deux issues possibles. Soit on tire une boule blanche (« succès ») avec une probabilité égale à  $\frac{1}{3}$ . Soit on tire une boule noire (« échec ») avec une probabilité égale à  $\frac{2}{3}$ .

Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n - 1$  et  $\frac{1}{3}$  :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n - 1 ; \frac{1}{3}\right).$$

$$p(U_n) = p(X = 1) = \binom{n-1}{1} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

$$\text{Soit } p(U_n) = (n-1) \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}.$$

c.  $p_n = p(U_n \cap B_n) = p(U_n) \times p(B_n)$  par indépendance des tirages.

$$p_n = (n-1) \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}} \times \frac{1}{3}.$$

$$p_n = (n-1) \times \frac{2^{n-2}}{3^n}.$$

$$p_n = \frac{n-1}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

3. a. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . On note  $P_n$  la proposition :  $S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

• On a d'une part :  $S_2 = p_2 = \frac{1}{9}$  (voir question 1) et d'autre part :  $1 - \left(\frac{2}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - 2 \times \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$ .

Donc  $P_2$  est vraie.

• Supposons que  $P_n$  est vraie pour un entier  $n$  arbitrairement fixé ( $n \geq 2$ ).

On a alors :  $S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ . Or  $S_{n+1} = S_n + p_{n+1}$ .

$$\text{D'où } S_{n+1} = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{n}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$S_{n+1} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left[ \frac{3}{2} \left(\frac{n}{2} + 1\right) - \frac{n}{4} \right]$$

$$S_{n+1} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left[ \frac{3n}{4} + \frac{3}{2} - \frac{n}{4} \right]$$

$$S_{n+1} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left[ \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} \right]$$

$$S_{n+1} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left[ \frac{n+1}{2} + 1 \right].$$

Donc, si  $P_n$  est vraie, alors  $P_{n+1}$  est vraie.

**Conclusion :** La propriété est vraie pour  $n = 2$ , elle est héréditaire. On en déduit, d'après le principe de récurrence,

que, pour tout naturel  $n \geq 2$ ,  $S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

**b.**  $S_n = 1 - \frac{n}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ . Or  $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ .

$$n \left(\frac{2}{3}\right)^n = n e^{n \ln \frac{2}{3}}.$$

Or  $\ln \frac{2}{3} < 0$  car  $0 < \frac{2}{3} < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \ln \frac{2}{3}\right) = -\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$  (croissance comparée)

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \frac{2}{3} e^{n \ln \frac{2}{3}} = 0$ . D'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n e^{n \ln \frac{2}{3}} = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ . On a alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$ .

## Exercice 2


### Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire $g$

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x + 2x - 7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 7) = -\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x + 2x - 7) = +\infty.$$

2. La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$ ,  $g'(x) = 2e^x + 2$ .  
 Pour tout réel  $x$ ,  $g(x) > 0$ . Donc  $g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g$		

3. La fonction  $g$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Or } g(0,94) \approx -3,7 \times 10^{-5}$$

$$g(0,941) \approx 7 \times 10^{-3}$$

$$\text{donc } g(0,94) < g(\alpha) < g(0,941) \text{ et } 0,94 < \alpha < 0,941.$$

4.  $g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  ;  $g(\alpha) = 0$ . Donc  $g$  est négative sur  $]-\infty ; \alpha]$  et positive sur  $[\alpha ; +\infty[$ .

## Partie B : Étude d'une fonction $f$

1. Signe de  $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$ .

$$\text{On a : } 1 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$1 - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

On peut alors étudier le signe de  $f(x)$  dans un tableau.

$x$	$-\infty$	$0$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
signe de $(2x - 5)$	-	-	0	+
signe de $(1 - e^{-x})$	-	0	+	+
signe de $f(x)$	+	0	0	+

$$2. \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 5)(1 - e^{-x}).$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 5) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{-x}) = -\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 5)(1 - e^{-x})$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 5) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1 \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Pour tout réel } x, f'(x) = 2(1 - e^{-x}) + e^{-x}(2x - 5)$$

$$f'(x) = 2 + 2xe^{-x} - 7e^{-x}$$

$$f'(x) = e^{-x}(2e^x + 2x - 7)$$

$$f'(x) = e^{-x}g(x).$$

Or, pour tout réel  $x$ , on a  $e^{-x} > 0$ . Donc  $f'(x)$  a même signe que  $g(x)$ .

On en déduit que :

- $f'(x) < 0$  sur  $]-\infty; \alpha[$  donc  $f$  est décroissante sur  $]-\infty; \alpha[$
- $f'(x) \geq 0$  sur  $[\alpha; +\infty[$  donc  $f$  est croissante sur  $[\alpha; +\infty[$ .

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		$0$	
$f$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

**4. a.** On a  $f(\alpha) = (2\alpha - 5)(1 - e^{-\alpha})$ .

Or  $g(\alpha) = 0$  donc  $2e^{\alpha} + 2\alpha - 7 = 0$

$$e^{\alpha} = \frac{7 - 2\alpha}{2}$$

$$e^{-\alpha} = \frac{2}{7 - 2\alpha}.$$

D'où  $f(\alpha) = (2\alpha - 5) \left(1 - \frac{2}{7 - 2\alpha}\right)$

$$f(\alpha) = (2\alpha - 5) \left(\frac{5 - 2\alpha}{7 - 2\alpha}\right)$$

$$f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}.$$

**b.** La fonction  $h$  est une fonction rationnelle définie et dérivable sur  $]-\infty; \frac{5}{2}[$ .

Pour tout  $x < \frac{5}{2}$ ,

$$h'(x) = \frac{4(2x - 5)(2x - 7) - 2(2x - 5)^2}{(2x - 7)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2(2x - 5)(2x - 9)}{(2x - 7)^2}.$$

$2x - 5 < 0$  sur  $]-\infty; \frac{5}{2}[$ ;  $2x - 9 < 0$  sur  $]-\infty; \frac{5}{2}[$ ; et  $(2x - 7)^2 > 0$  sur  $]-\infty; \frac{5}{2}[$ .

Donc, pour tout  $x < \frac{5}{2}$ ,  $h'(x) > 0$ . La fonction  $h$  est strictement croissante sur  $]-\infty; \frac{5}{2}[$ .

Or  $f(\alpha) = h(\alpha)$  et  $0,94 < \alpha < 0,941$ . D'où  $h(0,94) < f(\alpha) < h(0,941)$ . Comme  $h(0,94) \approx -1,90125$  à  $10^{-5}$  près et  $h(0,941) \approx -1,89955$  à  $10^{-5}$  près, on peut donner comme encadrement de  $f(\alpha)$  d'amplitude de  $10^{-2}$  :

$$-1,902 < f(\alpha) < -1,892.$$

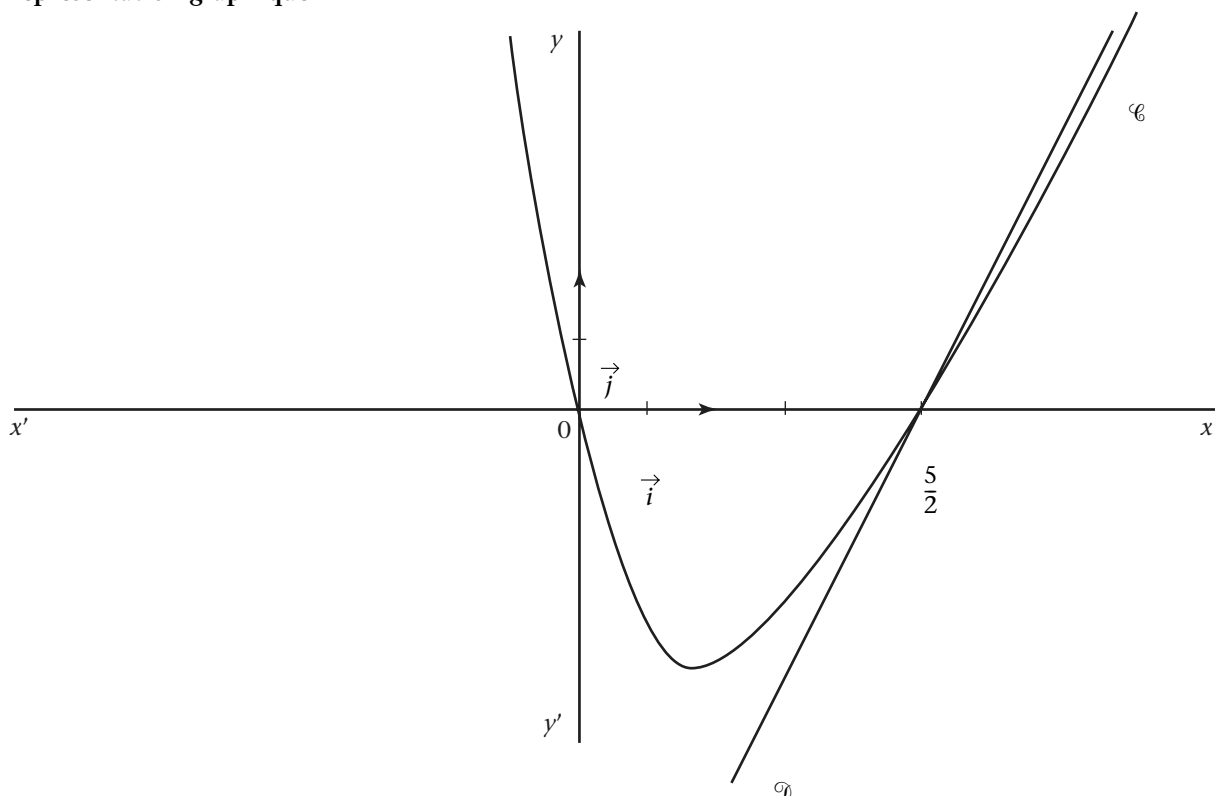
**5.** Pour tout  $x$  réel,  $f(x) - y = (2x - 5)(1 - e^{-x}) - (2x - 5)$ ,  $f(x) - y = (2x - 5)(-e^{-x})$ .

$f(x) - y = -2xe^{-x} + 5e^{-x}$ . Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$  (croissance comparée) et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5e^{-x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x - y) = 0$ . Donc

la droite  $\mathcal{D}$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  au voisinage de  $+\infty$ .

$x$	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
Signe de $(2x - 5)$	$-$	$0$	$+$
Signe de $-e^{-x}$	$-$		$-$
Signe de $f(x) - y$	$+$	$0$	$-$
Interprétation	$\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$		$\mathcal{C}$ est en dessous de $\mathcal{D}$

## 6. Représentation graphique



## Partie C : Calcul d'aire

La fonction  $f$  est négative sur  $[0 ; \frac{5}{2}]$ . (voir question B. 1.). D'où  $\mathcal{A} = - \int_0^{\frac{5}{2}} f(x) \, dx$  (en unité d'aire).

L'unité graphique est 2 cm donc l'unité d'aire est 4 cm<sup>2</sup>.  $\mathcal{A} = -4 \int_0^{\frac{5}{2}} f(x) \, dx$  (en cm<sup>2</sup>).

Soit  $I = \int_0^{\frac{5}{2}} (2x - 5)(1 - e^{-x}) \, dx$ .

On pose  $u(x) = 2x - 5$      $v'(x) = 1 - e^{-x}$   
 $u'(x) = 2$      $v(x) = x + e^{-x}$ .

$u$  et  $v$  sont dérivables sur  $[0, \frac{5}{2}]$  et  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $[0 ; \frac{5}{2}]$ .

D'après le théorème d'intégration par parties :

$$I = \left[ (2x - 5)(x + e^{-x}) \right]_0^{\frac{5}{2}} - \int_0^{\frac{5}{2}} 2(x + e^{-x}) \, dx$$

$$I = 5 - 2 \left[ \frac{1}{2}x^2 - e^{-x} \right]_0^{\frac{5}{2}}$$

$$I = 5 - 2 \left[ \frac{25}{8} - e^{-\frac{5}{2}} + 1 \right]$$



$$I = -\frac{13}{4} + 2e^{-\frac{5}{2}}.$$

$$D'où \mathcal{A} = -4 \left( -\frac{13}{4} + 2e^{-\frac{5}{2}} \right).$$

$$\mathcal{A} = 13 - 8e^{-\frac{5}{2}} \text{ cm}^2.$$

### Partie D : Étude d'une suite de rapports de distances

1. Pour  $n \geq 3$ , la courbe  $\mathcal{C}$  est située en dessous de  $\mathcal{D}$  (voir partie B), donc  $y_{B_n} > y_{C_n}$ .

Les coordonnées respectives des trois points sont :

$$A_n(n; 0)$$

$$B_n(n; 2n-5)$$

$$C_n(n; f(n))$$

$$C_n B_n = |y_{B_n} - y_{C_n}| = 2n-5-f(n)$$

$$A_n B_n = y_{B_n} - y_{A_n} = 2n-5.$$

$$D'où u_n = \frac{C_n B_n}{A_n B_n} = \frac{2n-5-f(n)}{2n-5}$$

$$2. a. u_n = \frac{2n-5-f(n)}{2n-5}. \text{ Or } f(n) = (2n-5)(1-e^{-x})$$

$$u_n = 1 - (1-e^{-n}) = e^{-n}$$

$$u_{n+1} = e^{-(n+1)}.$$

D'où pour tout  $n \geq 3$ ,  $u_{n+1} = e^{-1}u_n$ . La suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $e^{-1}$ .

b. Comme  $|e^{-1}| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . La droite  $\mathcal{D}$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$  au voisinage de  $+\infty$  donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n B_n = 0$ . De plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n B_n = +\infty$  car le point  $A_n$  appartient à l'axe des abscisses et  $A_n$  est situé sur la droite

$\mathcal{D}$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n-5) = +\infty$ . Comme  $u_n = \frac{C_n B_n}{A_n B_n}$ , on a bien  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

### Exercice 3

$$1. 4z^2 - 12z + 153 = 0$$

$$\Delta = 144 - 4 \times 4 \times 153 = -2\,304 = (48i)^2.$$

L'équation admet deux racines complexes conjuguées :  $\frac{12+48i}{8}$  et  $\frac{12-48i}{8}$  soit  $\frac{3}{2} + 6i$  et  $\frac{3}{2} - 6i$ .

2. a. Q est l'image de B par la translation de vecteur  $\vec{w}$ , d'où :  $\vec{BQ} = \vec{w}$ .

$$\text{On a alors : } z_Q - z_B = -1 + \frac{5}{2}i$$

$$\text{soit } z_Q = \frac{3}{2} - 6i - 1 + \frac{5}{2}i.$$

$$z_Q = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i.$$

b. Le point R est l'image du point P par l'homothétie  $h$  de centre C et de rapport  $-\frac{1}{3}$ .

$$D'où \vec{CR} = -\frac{1}{3}\vec{CP}. \text{ On a alors :}$$

$$z_R - z_C = -\frac{1}{3}(z_P - z_C)$$

$$z_R + 3 + \frac{1}{4}i = -\frac{1}{3}\left(3 + 2i + 3 + \frac{1}{4}i\right)$$

$$z_R = -5 - i.$$

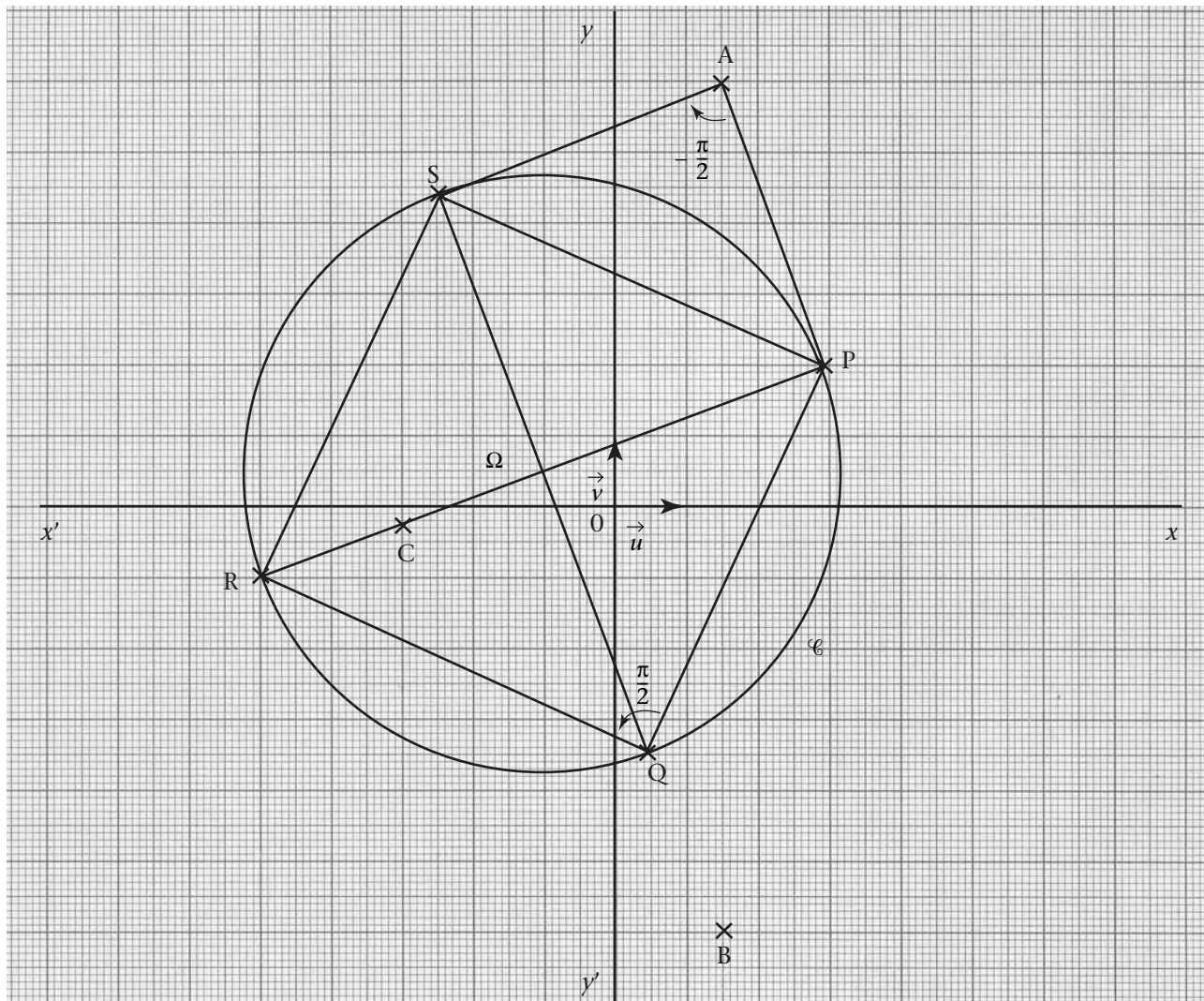
c. Le point S est l'image du point P par la rotation  $r$  de centre A et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

$$\text{D'où } z_S - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}} (z_P - z_A)$$

$$\text{Soit } z_S = \frac{3}{2} + 6i - i \left( 3 + 2i - \frac{3}{2} - 6i \right)$$

$$z_S = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i.$$

d. Figure



3. a.  $\vec{SP}$  a pour affixe :  $z_P - z_S = (3 + 2i) - \left(-\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i\right) = \frac{11}{2} - \frac{5}{2}i.$

$\vec{RQ}$  a pour affixe :  $z_Q - z_R = \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i\right) - (-5 - i) = \frac{11}{2} - \frac{5}{2}i.$

D'où  $\vec{SP} = \vec{RQ}$  donc le quadrilatère PQSR est un parallélogramme.

b.  $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = \frac{-5 - i - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i}{3 + 2i - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i} = \frac{-\frac{11}{2} + \frac{5}{2}i}{\frac{5}{2} + \frac{11}{2}i}.$

$$\text{Or } i \left( \frac{5}{2} + \frac{11}{2}i \right) = \frac{5}{2}i - \frac{11}{2} \text{ donc } \frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = i.$$

$$\text{D'où } z_R - z_Q = i(z_P - z_Q)$$

$$z_R - z_Q = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_P - z_Q).$$

Donc R est l'image de P par la rotation de centre Q et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . On en déduit que **le parallélogramme PQRS est un carré.**

**c.** Les points P, Q, R, S étant les sommets d'un carré, ils appartiennent au cercle de centre  $\Omega$ , milieu de [PR] et de rayon  $\Omega P$ .

$$z_\Omega = \frac{1}{2}(z_P + z_R)$$

$$z_\Omega = -1 + \frac{1}{2}i.$$

$$\Omega P = |z_P - z_\Omega| = \left| 4 + \frac{3}{2}i \right|$$

$$\Omega P = \frac{1}{2}\sqrt{73}.$$

$\mathcal{C}$  est le cercle de centre  $\Omega$ , d'affixe  $-1 + \frac{1}{2}i$  et de rayon  $\frac{1}{2}\sqrt{73}$ .

**4.** L'affixe du vecteur  $\overrightarrow{AP}$  est  $z_P - z_A = \frac{3}{2} - 4i$ . L'affixe du vecteur  $\overrightarrow{RP}$  est  $z_P - z_R = 8 + 3i$ . Donc le vecteur  $\overrightarrow{AP}$  a pour coordonnées  $\left(\frac{3}{2}; -4\right)$  et le vecteur  $\overrightarrow{RP}$  a pour coordonnées  $(8; 3)$ . D'où  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{RP} = \frac{3}{2} \times 8 - 4 \times 3 = 0$ . Les vecteurs  $\overrightarrow{AP}$  et  $\overrightarrow{RP}$  sont donc orthogonaux. La droite (AP) est perpendiculaire au diamètre [RP] en P donc **la droite (AP) est tangente au cercle  $\mathcal{C}$  en P.**