

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = 1, \quad b = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

1. a) Donner la forme exponentielle de c et la forme algébrique de d .
b) Représenter les points A, B, C et D.
c) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.
2. Montrer que les points D, A et C sont alignés.
3. Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe s de centre O qui transforme A en C.
4. On note F et G les images par la similitude directe s des points D et C respectivement.
Montrer que les points F, C et G sont alignés.
5. Déterminer l'affixe f du point F.
6. On considère la transformation φ qui à tout point M, d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \bar{z} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pour toute droite δ du plan, on notera σ_δ la symétrie orthogonale d'axe δ .

- a) Soit r la transformation qui à tout point M_1 d'affixe z_1 associe le point M'_1 d'affixe z'_1 telle que :

$$z'_1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} z_1 + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Déterminer la nature de r et donner ses éléments caractéristiques.

- b) En utilisant les nombres complexes, donner une mesure de l'angle (\vec{AO}, \vec{AB}) , puis déterminer la droite Δ telle que : $r = \sigma_\Delta \circ \sigma_{(AO)}$.
- c) Montrer que $\varphi = r \circ \sigma_{(AO)}$. En déduire la nature de φ .

Tournez la page S.V.P.