Exercice 2 *(5 points)*

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$ [unité graphique : 6 cm].

On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z' définie par $z' = z\, e^{\frac{5i\pi}{6}}$ et on définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :

M_0 a pour affixe $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et pour tout entier naturel n, $\mathrm{M}_{n+1} = f(\mathrm{M}_n)$. On appelle z_n l'affixe de M_n.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. Placer les points M_0, M_1, M_2.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$ (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
3. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p, montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si et seulement si $(n - p)$ est multiple de 12.
4.
   a. On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(4, 9)$ est solution, résoudre l'équation (E).

   b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite $[\mathrm{O}x)$.

Tournez la page S.V.P.