

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

---

MATHÉMATIQUES

Série : S

---

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures. — COEFFICIENT : 7

---

*Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5,  
et une page annexe à rendre avec la copie.*

*Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.*

*L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.*

*Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.  
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour  
une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.*

**Tournez la page S.V.P.**

**Exercice 1 (4 points)**

**Commun à tous les candidats**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique : 2cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives  $a = 2$ ,  $b = 1 - i$  et  $c = 1 + i$ .

1. a. Placer les points A, B et C sur une figure.

b. Calculer  $\frac{c-a}{b-a}$ . En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2. a. On appelle  $r$  la rotation de centre A telle que  $r(B) = C$ .

Déterminer l'angle de  $r$  et calculer l'afixe  $d$  du point  $D = r(C)$ .

b. Soit  $\Gamma$  le cercle de diamètre  $[BC]$ .

Déterminer et construire l'image  $\Gamma'$  du cercle  $\Gamma$  par la rotation  $r$ .

3. Soit M un point de  $\Gamma$  d'afixe  $z$ , distinct de C et  $M'$  d'afixe  $z'$  son image par  $r$ .

a. Montrer qu'il existe un réel  $\theta$  appartenant à  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{\pi}{2}; 2\pi\right[$  tel que  $z = 1 + e^{i\theta}$ .

b. Exprimer  $z'$  en fonction de  $\theta$ .

c. Montrer que  $\frac{z'-c}{z-c}$  est un réel. En déduire que les points C, M et  $M'$  sont alignés.

d. Placer sur la figure le point M d'afixe  $1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$  et construire son image  $M'$  par  $r$ .

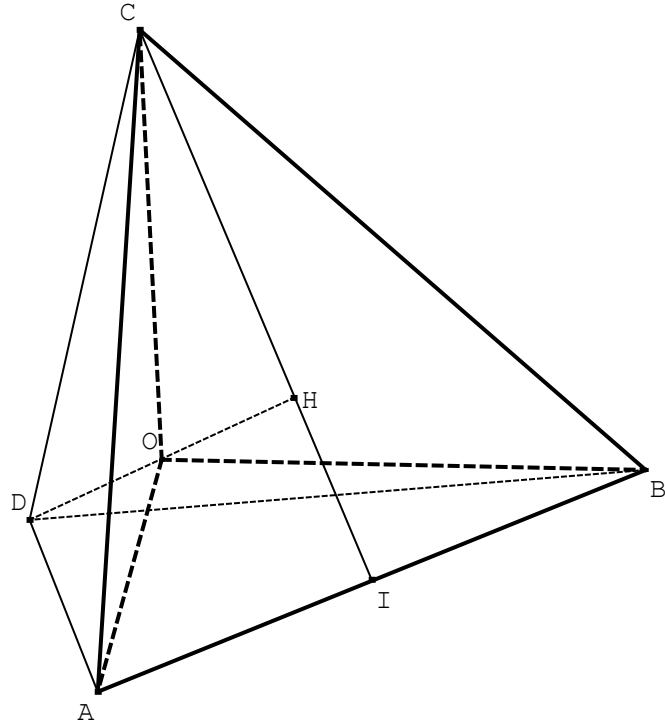
### Exercice 2 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Soient  $a$  un réel strictement positif.  
et  $OABC$  un tétraèdre tel que :

- $OAB$ ,  $OAC$  et  $OBC$  sont des triangles rectangles en  $O$ .
- $OA = OB = OC = a$ .

On appelle  $I$  le pied de la hauteur issue de  $C$  du triangle  $ABC$ ,  $H$  le pied de la hauteur issue de  $O$  du triangle  $OIC$ , et  $D$  le point de l'espace défini par  $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$ .



1. Quelle est la nature du triangle  $ABC$  ?
2. Démontrer que les droites  $(OH)$  et  $(AB)$  sont orthogonales, puis que  $H$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ .
3. Calcul de  $OH$ .

a. Calculer le volume  $V$  du tétraèdre  $OABC$  puis l'aire  $S$  du triangle  $ABC$ .

b. Exprimer  $OH$  en fonction de  $V$  et de  $S$ , en déduire que  $OH = a \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

4. Étude du tétraèdre  $ABCD$ .

L'espace est rapporté au repère orthonormal  $\left( O ; \frac{1}{a}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OC} \right)$ .

a. Démontrer que le point  $H$  a pour coordonnées :  $\left( \frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3} \right)$ .

b. Démontrer que le tétraèdre  $ABCD$  est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).

c. Soit  $\Omega$  le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre  $ABCD$ .

Démontrer que  $\Omega$  est un point de la droite  $(OH)$  puis calculer ses coordonnées.

**Tournez la page S.V.P.**

### Problème (11 points)

#### Commun à tous les candidats

Soit  $N_0$  le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant  $t = 0$  ( $N_0$  étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).

**Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :**

- un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (partie A)
- un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (partie B).

#### Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.

Dans ce premier modèle, on note  $f(t)$  le nombre de bactéries à l'instant  $t$  (exprimé en millions d'individus). La fonction  $f$  est donc solution de l'équation différentielle :  $y' = ay$ .

(où  $a$  est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que  $f(0) = N_0$ .
2. On note  $T$  le temps de doublement de la population bactérienne.

Démontrer que, pour tout réel  $t$  positif :  $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$ .

#### Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :

Soit  $g(t)$  est le nombre de bactéries à l'instant  $t$  (exprimé en millions d'individus) ; la fonction  $g$  est une fonction strictement positive et dérivable sur  $[0 ; +\infty[$  qui vérifie pour tout  $t$  de  $[0 ; +\infty[$  la relation :

$$(E) \quad g'(t) = a g(t) \left( 1 - \frac{g(t)}{M} \right),$$

où  $M$  est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et  $a$  le réel défini dans la partie A.

1. a. Démontrer que si  $g$  est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction  $\frac{1}{g}$  est solution de l'équation différentielle (E') :  $y' + ay = \frac{a}{M}$ .

b. Résoudre (E').

- c. Démontrer que si  $h$  est une solution strictement positive de (E'), alors  $\frac{1}{h}$  vérifie (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel positif  $t$ ,  $g(t) = \frac{M}{1 + C e^{-at}}$ , où  $C$  est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.

- a. Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$  et démontrer, pour tout réel  $t$  positif ou nul, la double inégalité :  $0 < g(t) < M$ .

- b. Étudier le sens de variation de  $g$  (on pourra utiliser la relation (E)).

Démontrer qu'il existe un réel unique  $t_0$  positif tel que  $g(t_0) = \frac{M}{2}$ .

- c. Démontrer que  $g'' = a(1 - \frac{2g}{M}) g'$ . Étudier le signe de  $g''$ . En déduire que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant  $t_0$  défini ci-dessus. Exprimer  $t_0$  en fonction de  $a$  et  $C$ .
- d. Sachant que le nombre de bactéries à l'instant  $t$  est  $g(t)$ , calculer le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et  $t_0$ , en fonction de  $M$  et  $C$ .

### Partie C

1. Le tableau présenté en Annexe I a permis d'établir que la courbe représentative de  $f$  passait par les points de coordonnées respectives (0 ; 1) et (0,5 ; 2). En déduire les valeurs de  $N_0$ ,  $T$  et  $a$ .
2. Sachant que  $g(0) = N_0$  et que  $M = 100 N_0$ , démontrer, pour tout réel  $t$  positif ou nul, l'égalité suivante :

$$g(t) = \frac{100}{1 + 99 \times 4^{-t}}.$$

3. Tracer, sur la feuille donnée en Annexe II, la courbe  $\Gamma$  représentative de  $g$ , l'asymptote à  $\Gamma$  ainsi que le point de  $\Gamma$  d'abscisse  $t_0$ .
4. Dans quelles conditions le premier modèle vous semble-t-il adapté aux observations faites ?

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

---

**MATHÉMATIQUES  
OBLIGATOIRE**

Série : S

---

***PAGE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE.***

**Tournez la page S.V.P.**

## Document à rendre avec la copie

### Annexe I

$t$ (en $h$ )	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
Nombre de bactéries (en millions)	1,0	2,0	3,9	7,9	14,5	37,9	70,4	90,1	98

Les points obtenus à partir de ce tableau, ainsi que la fonction  $f$ , sont représentés dans le repère ci-dessous.

### Annexe II

