BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2002

MATHÉMATIQUES

Série : S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4, et 1 page annexe non numérotée à rendre avec la copie.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

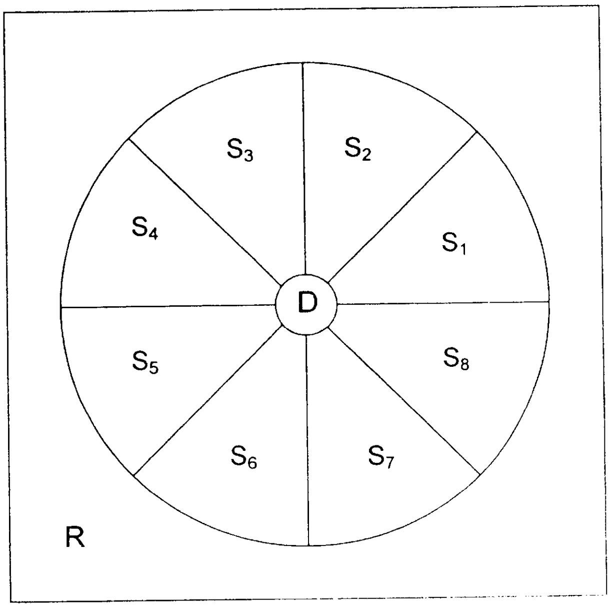
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Exercice 1 : *(4 points)*

Commun à tous les candidats

Un carré de côté 20 cm est partagé selon les 10 zones suivantes :
- un disque D de rayon 1 cm
- 8 secteurs S_1, S_2, …, S_8 de même aire délimités par les frontières du disque D et du disque D' de même centre et de rayon 9 cm
- une zone R entre le disque D' et le bord du carré.

On place un point aléatoirement dans le carré. La probabilité de placer le point dans une zone quelconque du carré est proportionnelle à l'aire de cette zone.



1. *a.* Déterminer la probabilité p(D) pour que le point soit placé dans le disque D.

   b. Déterminer la probabilité $p(S_1)$ pour que le point soit placé dans le secteur S_1.

2. Pour cette question 2, on utilisera les valeurs approchées suivantes :
   p(D) = 0,008 et, pour tout k appartenant à $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $p(S_k) = 0{,}0785$.

   A cette situation aléatoire est associé le jeu suivant :
   - un point placé dans le disque D fait gagner 10 euros
   - un point placé dans le secteur S_k fait gagner k euros pour tout k appartenant à $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
   - un point placé dans la zone R fait perdre 4 euros.

   On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique obtenu.

   a. Calculer la probabilité p(R) pour que le point soit placé dans la zone R.
   Calculer l'espérance de X.

   b. On joue deux fois de suite. On a donc placé deux points de manière indépendante dans le carré.
   Calculer la probabilité d'obtenir un gain total positif ou nul.

   c. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. On joue n fois de suite.
   On a donc placé n points de manière indépendante dans le carré.

   Calculer la probabilité p_n d'obtenir au moins un point placé dans le disque D.
   Déterminer la plus petite valeur de n tel que $p_n \geq 0{,}9$.

Exercice 2 : *(5 points)*

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et i.
A tout point M, distinct de A et d'affixe z, est associé le point M' d'affixe Z définie par :

$$Z = \frac{(1-i)(z-i)}{z-1}$$

1. *a.* Calculer l'affixe du point C' associé au point C d'affixe $-i$.

   b. Placer les points A, B et C.

2. Soit $z = x + i\,y$ où x et y désignent deux nombres réels.

   a. Montrer l'égalité :

   $$Z = \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}\,i$$

   b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z telle que Z soit réel.

   c. Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z telle que $\mathrm{Re}(Z)$ soit négatif ou nul.

3. *a.* Ecrire le nombre complexe $(1-i)$ sous forme trigonométrique.

   b. Soit M un point d'affixe z, distinct de A et de B. Montrer que :

   $\dfrac{(1-i)(z-i)}{z-1} \in \mathbb{R}^*$ si et seulement si il existe un entier k tel que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

   c. En déduire l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

   d. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Tournez la page S.V.P.

Problème : (*11 points*)

Commun à tous les candidats

Partie A :

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $e^{2x} - 1 > 0$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{e^{2x} - 1}$.

   a. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

   b. Calculer $g'(x)$. Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ dont la courbe représentative C dans un repère orthogonal $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$ est donnée sur la feuille annexe avec sa tangente au point d'abscisse e.

On admet l'égalité suivante : $f(x) = 2x\left[a(\ln x)^2 + b\ln x + c\right]$ où a, b et c désignent trois réels.

1. *a.* Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.

   b. À l'aide des informations données sur le graphique, déterminer les valeurs de $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)$, $f'\left(\sqrt{e}\right)$ et $f'(e)$.

   c. En déduire l'égalité : $f(x) = 2x\left[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right]$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$.

2. *a.* Déterminer la limite de f en 0. On pourra poser $t = -\ln x$ et vérifier pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ l'égalité :

$$f(x) = 2e^{-t}\left[2t^2 + 3t + 2\right].$$

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   c. Montrer pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ l'égalité : $f'(x) = 2(\ln x + 1)(2\ln x - 1)$.

   d. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

Partie C :

1. Tracer, dans le repère $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$ de la feuille annexe, la courbe représentative Γ de la fonction g étudiée en partie A.
2. *a.* Montrer que pour tout $x > 0$, on a $g(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} - 1} - 1$.

   b. Calculer, et exprimer en unités d'aire, l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{4}$ et $x = 2$.
3. Soit φ la fonction définie sur $[0{,}1\,; 0{,}3]$ par : $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.

   a. Montrer que, pour tout x appartenant à $[0{,}1\,; 0{,}3]$, on a : $\varphi'(x) > 0$.

   b. Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède une solution unique α sur $[0{,}1\,; 0{,}3]$ et déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie D :

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.
2. On définit la fonction h sur $]0\,;+\infty[$ par l'expression suivante : $h = g \circ f$

   a. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de h.

   b. Déterminer le sens de variation de h sur $]0\,;+\infty[$.

   c. Montrer que $h(\alpha) = g \circ g(\alpha)$. Déterminer une valeur approchée de $h(\alpha)$ à 10^{-4} près.

Remplissez très lisiblement le talon ci-dessous

NOM :

Prénoms :

N° D'INSCRIPTION OU DE TABLE

CENTRE D'EXAMEN :

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2002

MATHÉMATIQUES
OBLIGATOIRE

Série : **S**

PAGE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE.

Tournez la page S.V.P.

courbe C