

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DE 2001

**MATHÉMATIQUES**

SÉRIE : S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures. – COEFFICIENT : 7

*Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4*

*Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats*

*L'utilisation d'une calculatrice est autorisée*

*Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.  
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements  
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.*

**Tournez la page S.V.P.**

### Exercice 1 (6 points)

#### Commun à tous les candidats

Soient trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit  $k$  un réel de l'intervalle  $[-1; 1]$ .

On note  $G_k$  le barycentre du système  $\{(A, k^2 + 1), (B, k), (C, -k)\}$ .

1. Représenter les points A, B, C, le milieu I de [BC] et construire les points  $G_1$  et  $G_{-1}$ .

2. a. Montrer que pour tout réel  $k$  de l'intervalle  $[-1; 1]$ , on a l'égalité :

$$\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2 + 1} \overrightarrow{BC}.$$

b. Établir le tableau de variation de la fonction  $f$  définie sur  $[-1; 1]$  par  $f(x) = -\frac{x}{x^2 + 1}$ .

c. En déduire l'ensemble des points  $G_k$  quand  $k$  décrit l'intervalle  $[-1; 1]$ .

*Pour la suite de l'exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.*

3. Déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que :

$$\|2 \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2 \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

4. Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que :

$$\|2 \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2 \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|.$$

5. L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives  $(0; 0; 2)$ ,  $(-1; 2; 1)$  et  $(-1; 2; 5)$ . Le point  $G_k$  et les ensembles E et F sont définis comme ci-dessus.

a. Calculer les coordonnées de  $G_1$  et  $G_{-1}$ . Montrer que les ensembles E et F sont sécants.

b. Calculer le rayon du cercle  $\mathcal{C}$  intersection de E et F.

## Exercice 2 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  [unité graphique : 6 cm].

On considère la suite  $(\alpha_n)$  de nombres réels définie par  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{5\pi}{6}$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on appelle  $M_n$  le point du cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  de rayon 1 tel que l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_n})$  ait pour mesure  $\alpha_n$ .

1. Placer les douze points  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{11}$ .
2. On appelle  $z_n$  l'affixe de  $M_n$ . Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a l'égalité  $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$ .
3. a. Montrer pour tout entier naturel  $n$ , les propriétés suivantes :
  - les points  $M_n$  et  $M_{n+6}$  sont diamétralement opposés ;
  - les points  $M_n$  et  $M_{n+12}$  sont confondus.b. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a l'égalité  $z_{n+4} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} z_n$ . En déduire que la distance  $M_n M_{n+4}$  vaut  $\sqrt{3}$  puis que le triangle  $M_n M_{n+4} M_{n+8}$  est équilatéral.  
On admettra que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points  $M_n$  sont de la forme  $M_n M_{n+4} M_{n+8}$ .
4. Douze cartons indiscernables au toucher, marqués  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{11}$ , sont disposés dans une urne.  
On tire au hasard et simultanément trois cartons de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir les trois sommets d'un triangle équilatéral.

Tournez la page S.V.P.

## Problème (9 points)

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Toutes les courbes demandées seront représentées sur un même graphique (unité graphique : 2 cm).

### A. ÉTUDE D'UNE FONCTION $f$

On définit la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - 1)$ .

1. Calculer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Étudier le sens de variation de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .
3. Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  et A le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse 3.

Calculer l'ordonnée de A. Soit B le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $\frac{5}{4}$ , P le projeté orthogonal de B sur l'axe  $(O, \vec{u})$  et H le projeté orthogonal de B sur l'axe  $(O, \vec{v})$ .

Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points B, P et H. Placer les points A, B, P et H dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  et représenter la courbe  $\mathcal{C}$ .

### B. UTILISATION D'UNE ROTATION

Soit  $r$  la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . À tout point M du plan d'affixe  $z$ , la rotation  $r$  associe le point M' d'affixe  $z'$ .

1. a. Donner  $z'$  en fonction de  $z$ .

On note  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  ( $x, y, x', y'$  réels), exprimer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ , puis exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $x'$  et  $y'$ .

- b. Déterminer les coordonnées des points A', B' et P' images respectives des points A, B et P par la rotation  $r$ .

2. On appelle  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}$  et  $\Gamma$  sa courbe représentative dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

- a. Montrer que lorsqu'un point M appartient à  $\mathcal{C}$ , son image M' par  $r$  appartient à  $\Gamma$ .

On admet que lorsque le point M décrit  $\mathcal{C}$ , le point M' décrit  $\Gamma$ .

- b. Tracer sur le graphique précédent les points A', B', P' et la courbe  $\Gamma$  (l'étude des variations de  $g$  n'est pas demandée).

### C. CALCUL D'INTÉGRALES

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de même aire.

1. Calculer l'intégrale  $\int_0^{\ln 2} g(x) dx$ . Interpréter graphiquement cette intégrale.

2. a. Déterminer, en unités d'aire, l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine plan  $\mathcal{D}$  limité par les segments [AO], [OH] et [HB] et l'arc de courbe  $\mathcal{C}$  d'extrémités B et A.

- b. On pose  $I = \int_{5/4}^3 \ln(\sqrt{1+x} - 1) dx$ .

Trouver une relation entre  $\mathcal{A}$  et I puis en déduire la valeur exacte de l'intégrale I.