

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DE 2001

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures. – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

*Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Tournez la page S.V.P.

Exercice I (4 points)

Commun à tous les candidats

On dispose de deux urnes a et b contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à choisir une urne parmi les urnes a et b proposées (le choix de l'urne est effectué au hasard, les deux choix sont équiprobables) puis à effectuer le tirage d'une boule dans l'urne choisie.

On note A l'événement « l'urne a est choisie », B l'événement « l'urne b est choisie » et R l'événement « une boule rouge est obtenue au tirage ».

On note $p_A(R)$ la probabilité conditionnelle de l'événement R par rapport à l'événement A .

1. Dans cette question, l'urne a contient une boule rouge et quatre boules blanches, l'urne b contient quatre boules rouges et deux boules blanches.

a. Déterminer les probabilités suivantes : $p(A)$, $p_A(R)$, $p(A \cap R)$.

b. Montrer que $p(R) = \frac{13}{30}$.

c. Sachant que la boule obtenue est rouge, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit l'urne a ?

2. Dans cette question, on suppose que l'urne a contient quatre boules blanches et l'urne b deux boules blanches. L'urne a contient en outre n boules rouges (où n désigne un entier naturel inférieur ou égal à 5), l'urne b en contient $(5 - n)$.

a. Exprimer $p_A(R)$ et $p_B(R)$ en fonction de n .

b. Démontrer : $p(R) = \frac{-n^2 + 4n + 10}{(4 + n)(7 - n)}$.

c. On sait que n ne prend que six valeurs entières.

Déterminer la répartition des cinq boules rouges entre les urnes a et b donnant la plus grande valeur possible de $p(R)$.

Exercice II (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, direct.

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe $-i$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C} - \{i\}$ par $f(z) = \frac{1 - iz}{z - i}$.

1. Vérifier que pour tout z de $\mathbb{C} - \{i\}$ $f(z) = -i + \frac{2}{z - i}$.
2.
 - a. Démontrer que $-i$ n'a pas d'antécédent par f .
 - b. Déterminer les antécédents de 0 et de i par f .
3. À tout point M différent de A , d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = f(z)$.
 - a. Démontrer que pour tout point M différent de A , le produit des longueurs AM et BM' est égal à 2 ($AM \cdot BM' = 2$).
 - b. Démontrer que lorsque M décrit le cercle C de centre A et de rayon 4 , M' se déplace sur un cercle C' dont on précisera le centre et le rayon.
4.
 - a. Déterminer l'ensemble E des points $M(z)$ tels que $z - i$ soit un nombre réel non nul.
 - b. Démontrer que lorsque M décrit E , M' se déplace sur une droite Δ que l'on précisera.
 - c. Lorsque M décrit E , M' décrit-il toute la droite Δ ?
5. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur non nul.

Tournez la page S.V.P.

Problème (11 points)

Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 1 cm.

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$.

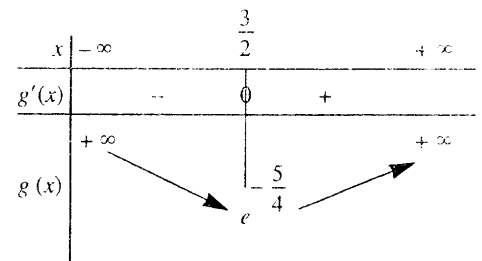
Soit \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le repère \mathcal{R} .

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. a. Étudier le sens de variation de f et donner le tableau de variation de f .
b. Tracer \mathcal{C} .
3. Soit $I = \int_{-3}^0 f(x) dx$.
a. Interpréter graphiquement I .
b. En utilisant l'intégration par parties, calculer $\int_{-3}^0 xe^x dx$ puis $\int_{-3}^0 x^2 e^x dx$.
c. En déduire la valeur exacte de I .

PARTIE B

1. Soit a et b deux nombres réels et g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{(x^2 + ax + b)}$.

Quelles sont les valeurs de a et b pour lesquelles le tableau de variation de g est celui donné ci-contre ?



2. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = e^{(x^2 - 3x + 1)}$ et Γ sa courbe représentative dans le repère \mathcal{R} .
a. Démontrer que la droite D d'équation $x = \frac{3}{2}$ est axe de symétrie de (Γ) .
b. Justifier l'affirmation suivante : « 3,2 est une valeur approchée à 10^{-1} près d'une solution de l'équation $h(x) = 5$ ».
c. Soit α un nombre dont 1,7 est une valeur approchée à 0,5 près.
Établir que $0,28 \leq h(\alpha) \leq 0,47$.

PARTIE C

Soit u une fonction dérivable sur \mathbb{R} dont le tableau de variation est donné ci-contre (a, b, c étant trois nombres réels).

Soit v_1, v_2, v_3 les fonctions définies par :

$$v_1(x) = e^{u(x)} \quad v_2(x) = u(e^x) \quad v_3(x) = u(x)e^x.$$

1. Déterminer le sens de variation des fonctions v_1 et v_2 (en justifiant votre réponse).
2. Indiquer un intervalle sur lequel il est possible de donner le sens de variation de la fonction v_3 (en justifiant votre réponse).

