

Baccalauréat S France septembre 1999

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient trois boules noires et une boule blanche. On considère l'expérience suivante :

On lance un jeton parfaitement équilibré, présentant une face noire et une face blanche. Si le jeton tombe sur la face blanche, on ajoute une boule blanche dans l'urne ; si le jeton tombe sur la face noire, on ajoute une boule noire dans l'urne.

Puis on tire simultanément, et au hasard, trois boules de l'urne.

1. On appelle E_0 l'évènement : « Aucune boule blanche ne figure parmi les trois boules tirées » et B l'évènement : « Le jeton est tombé sur la face blanche ».

a. Calculer $P(E_0 \cap B)$, $P(E_0 \cap \bar{B})$, puis $P(E_0)$.

b. On tire trois boules de l'urne, aucune boule blanche ne figure dans ce tirage. Quelle est la probabilité que le jeton soit tombé sur la face noire ?

2. On appelle E_1 l'évènement : « Une boule blanche et une seule figure parmi les trois boules tirées » et B l'évènement : « Le jeton est tombé sur la face blanche ».

a. Calculer la probabilité de l'évènement E_1 .

b. On effectue successivement quatre fois l'expérience décrite au début, qui consiste à lancer le jeton, puis à tirer les trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir, au moins une fois, une et une seule boule blanche ?

Exercice 2

5 points

Enseignement obligatoire

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm). On note Z_M l'affixe d'un point M .

Soit A le point d'affixe 4 et B le point d'affixe $4i$.

1. Soit θ un réel de $[0, 2\pi[$ et r un réel strictement positif.

On considère le point E d'affixe $re^{i\theta}$ et F le point tel que OEF est un triangle

rectangle isocèle vérifiant $\left(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Quelle est, en fonction de r et θ , l'affixe de F ?

2. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice. On choisira, uniquement pour cette figure :

$$\theta = 5\frac{\pi}{6} \text{ et } r = 3.$$

3. On appelle P, Q, R, S les milieux respectifs des segments $[AB], [BE], [EF], [FA]$.

a. Prouver que $PQRS$ est un parallélogramme.

b. On pose : $Z = \frac{Z_R - Z_Q}{Z_Q - Z_P}$.

Déterminer le module et un argument de Z . En déduire que PQRS est un carré.

4. a. Calculer, en fonction de r et θ , les affixes respectives des points P et Q.
- b. Quelle est, en fonction de r et θ , l'aire du carré PQRS?
- c. r étant fixé, pour quelle valeur de θ cette aire est-elle maximale? Quelle est alors l'affixe de E ?

EXERCICE 2

5 points

Enseignement de spécialité

Soit le repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan complexe. Les points A, B et C sont définis par leurs affixes respectives :

$$z_A = 3 - i\sqrt{3}; \quad z_B = 3 + i\sqrt{3}; \quad z_C = 2 + \sqrt{3} + 3i.$$

- Faire la figure en choisissant pour unité graphique 2 cm. (On placera l'origine sur la gauche de la feuille).
- Prouver que OAB est un triangle équilatéral direct. Soit G le centre de gravité du triangle OAB. Déterminer l'affixe z_G de G.
Dans la suite de l'exercice, on étudie deux isométries transformant [OA] en [GC].
- Soit a et b deux nombres complexes et R l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = az + b$.
 - Déterminer a et b pour que $R(O) = G$ et $R(A) = C$.
 - Prouver que R est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.
 - Prouver que les droites (OA) et (GC) sont perpendiculaires. Que peut-on dire des points G, B et C?
 - Construire, en justifiant la construction, l'image du triangle OAB par R.
- Soit a' et b' deux nombres complexes et f l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = a'\bar{z} + b'$.
 - Déterminer a' et b' pour que $f(O) = G$ et $f(A) = C$.
 - Soit I le milieu du segment [OG]. Déterminer le point $f(I)$. f est-elle une réflexion?
 - Construire en justifiant la construction, l'image du triangle OAB par f .

PROBLÈME

11 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f , dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A :

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.
2. Calculer $f'(x)$ en fonction de x . Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $\ln x(2 - \ln x)$. Déterminer le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
3. Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
4. On pose pour $p \geq 1$, $I_p = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2} dx$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I_1 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

b. Prouver, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier p supérieur ou égal à 1 :

$$I_{p+1} = -\frac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1)I_p.$$

- c. En utilisant les résultats précédents, calculer successivement I_2, I_3, I_4 .
- d. On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de $\mathcal{C}$, d'abscisses comprises entre 1 et e^2 . Le point M de $\mathcal{C}$, d'abscisse x , décrit alors un cercle de rayon $f(x)$.
Calculer le volume du solide ainsi engendré, en unités de volume.

Partie B :

Soit a un réel strictement positif et A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a . Soit T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point A .

1. Écrire une équation de T_a .
2. Déterminer les réels a , pour lesquels T_a passe par l'origine O du repère.
3. Donner une équation de chacune des tangentes à $\mathcal{C}$, passant par O .
Tracer ces tangentes sur la figure.

Partie C :

On étudie maintenant l'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{e^2}x$.

1. On pose pour x strictement positif, $\varphi_1(x) = x - e \ln x$.
Montrer que φ_1 est strictement croissante sur $]e, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, e[$.
2. On pose pour x strictement positif, $\varphi_2(x) = x + e \ln x$.
 - a. Étudier le sens de variation de φ_2 sur $]0, +\infty[$.

- b.** Prouver que $\varphi_2(x) = 0$ a une solution unique sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. On appelle α cette solution ; donner un encadrement de α , d'amplitude 10^{-1} .
- c.** En déduire que $\varphi_2(x) = 0$ a une seule solution sur $]0; +\infty[$.
- 3.** Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de Δ .