Durée : 4 heures

❧ Baccalauréat S France septembre 1998 ❧

Exercice I

4 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Il n'est pas demandé de faire de figure.

Les questions 3 et 4 sont indépendantes des questions 1 et 2.

On considère les quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives :

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad I \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1.
 - a. Calculer le produit vectoriel $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
 - b. Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les trois points A, B et C.
2. Soit (Q) le plan d'équation :

$$x + y - 3z + 2 = 0$$

et (Q') le plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- a. Pourquoi (Q) et (Q') sont-ils sécants?
 - b. Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection (Δ) des plans (Q) et (Q').
3. Écrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.
4. On considère les points J et K de coordonnées respectives :

$$J \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer avec soin l'intersection de la sphère (S) et de la droite (JK).

Exercice II

5 points

1. On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16.$$

- a. Calculer P(4).
 - b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ cm.
Soient A, B, C les points d'affixes respectives :

$$a = 4 \quad b = 1 + i\sqrt{3} \quad c = 1 - i\sqrt{3}$$

- a. Placer les points A, B, C sur une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

- b.** Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
- 3.** Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$
On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$
et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
- a.** Quelles sont les affixes respectives de F et de G?
b. Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.
- 4.** Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COFH.
- a.** Montrer que le quadrilatère COFH est un carré.
b. Calculer l'affixe du point H.
c. Le triangle AGH est-il équilatéral?

Problème**11 points****Partie A**

- 1.** Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

- 2.** Déterminer la solution φ de cette équation, définie sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie les conditions :

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(0) = -e$$

Partie B

- 1.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -xe^{2x+1}.$$

- a.** Quel est, suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$?
- b.** Étudier le sens de variation de f .
- c.** Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- d.** Dresser le tableau de variations de f .
- e.** On appelle $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).
Quelle est la tangente à $(\mathcal{C})$ au point O ?
Écrire une équation de la tangente T à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse (-1).
- f.** On appelle (Γ) la représentation graphique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x.$$

Quelle est la tangente à (Γ) au point d'abscisse (-1) ?

- 2.** On appelle h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 1 + exe^x.$$

- a.** Étudier le sens de variation de h .
En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x .

- b. Étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Γ) .
- c. Tracer, sur le même graphique, les courbes T, $(\mathcal{C})$ et (Γ) .
3. Soit m un réel quelconque et M le point de la courbe (Γ) d'abscisse m .
- a. Écrire une équation de la tangente D à (Γ) en M .
- b. La tangente D coupe les axes de coordonnées en A et B .
Calculer, en fonction de m , les coordonnées du milieu J du segment $[AB]$.
- c. Prouver que J appartient à $(\mathcal{C})$.
- d. Tracer (D) et J pour $m = 0$.

Partie C

1. Soit x un réel quelconque.
À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^x te^{2t} dt.$$

2. Soit x un réel négatif.
Calculer l'aire $\mathcal{A}(x)$, exprimée en cm^2 , de l'ensemble des points N du plan dont les coordonnées (u, v) vérifient :

$$\begin{cases} x \leq u \leq 0 \\ 0 \leq v \leq f(x) \end{cases}$$

3. Calculer $\mathcal{A}(-1)$.
4. $\mathcal{A}(x)$ admet-elle une limite quand x tend vers moins l'infini? Si oui laquelle?