

BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE
STI – ARTS APPLIQUES

MATHÉMATIQUES
SESSION 2002

Durée : 2 heures

Coefficient : 2

CALCULATRICE AUTORISÉE

FOURNITURES :

- FORMULAIRE OFFICIEL
- DEUX FEUILLES DE PAPIER MILLIMÉTRÉ

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4

EXERCICE 1 (8 points)

Dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous, on considère le rectangle RSTU de centre O et l'ellipse $\mathcal{E}$ inscrite dans ce rectangle. Le point R a pour coordonnées $(-4 ; 3)$.

Reproduire la figure ci-dessous sur une feuille de papier millimétré.

- Placer les sommets de cette ellipse qu'on notera A, A', B et B' et préciser leurs coordonnées. On placera A et A' sur l'axe focal. Décrire la construction géométrique des foyers F et F' et préciser leurs coordonnées.

- Parmi les égalités suivantes, choisir celle que vérifie tout point M de l'ellipse $\mathcal{E}$.

$$MF - MF' = 8$$

$$MF + MF' = 6$$

$$MF + MF' = 8$$

- Parmi les égalités suivantes, choisir celle qui est une équation de l'ellipse $\mathcal{E}$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

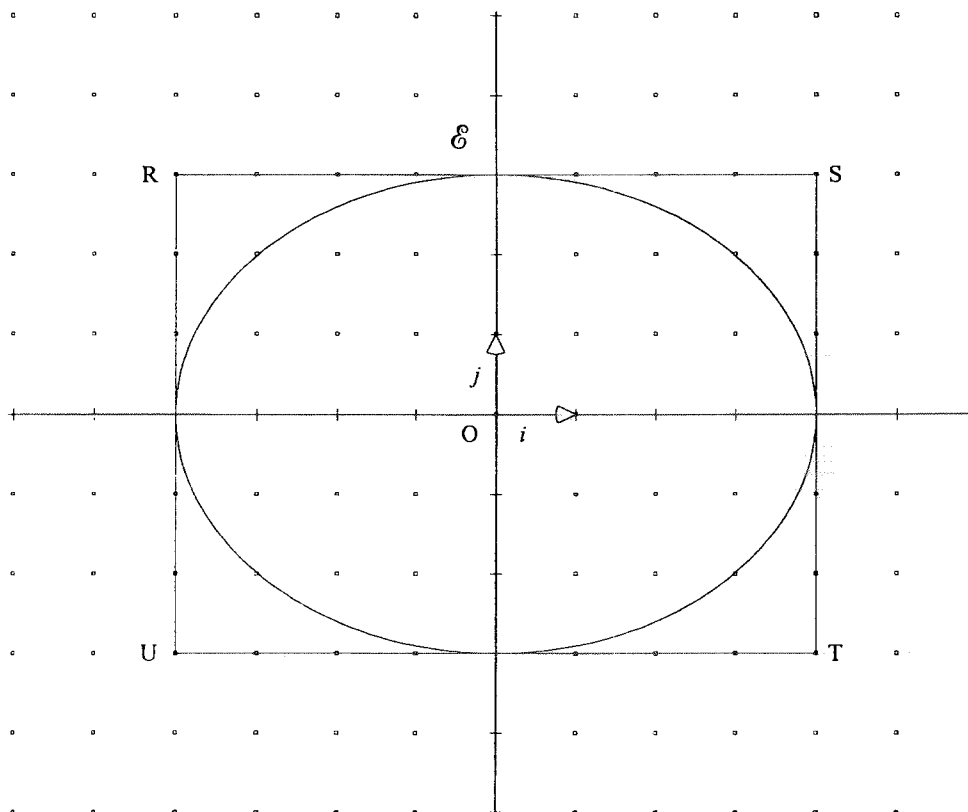
$$9x^2 + 16y^2 = 144$$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

- Déterminer l'ordonnée des points de $\mathcal{E}$ ayant pour abscisse 2.

- On veut dessiner un carré de centre O dont les sommets sont des points de l'ellipse $\mathcal{E}$ et dont les côtés sont parallèles à ceux du rectangle. Quelle est la longueur du côté de ce carré ?



EXERCICE 2 (12 points)

Partie A

Dans le repère $(O ; \vec{i} , \vec{j})$ dont l'unité graphique est 3 cm, on a tracé la courbe $\mathcal{P}$ représentative d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des nombres réels.

1. a) Déterminer graphiquement $g(0)$; $g(1)$; $g'(1)$.
b) En déduire les valeurs de a , b , c .
2. Sachant que $g(x) = -x^2 + 2x + 1$, déterminer la primitive G de la fonction g , définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $G(0) = 0$.
3. Calculer l'intégrale $I = \int_0^2 g(x) dx$

Partie B

On considère la fonction h définie sur $[1,5 ; 4]$ par $h(x) = \frac{3-x}{x-1}$ et $\mathcal{H}$ la courbe représentative de h dans le même repère $(O ; \vec{i} , \vec{j})$.

1. Déterminer la fonction h' dérivée de la fonction h . Etudier son signe et en déduire le sens de variation de h sur $[1,5 ; 4]$.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{H}$ au point $B(2 ; 1)$. On admettra que (T) est aussi tangente à $\mathcal{P}$ au même point B .
3. Sur une feuille de papier millimétré choisir un repère $(O ; \vec{i} , \vec{j})$, dont l'unité graphique est 3 cm et dont l'axe des abscisses est placé à mi hauteur. On trace la courbe $\mathcal{H}$ et la droite (T) .
4. Soit H la fonction définie sur $[1,5 ; 4]$ par $H(x) = 2\ln(x-1) - x$. Vérifier que H est une primitive de la fonction h , puis calculer l'intégrale $J = \int_2^3 h(x) dx$

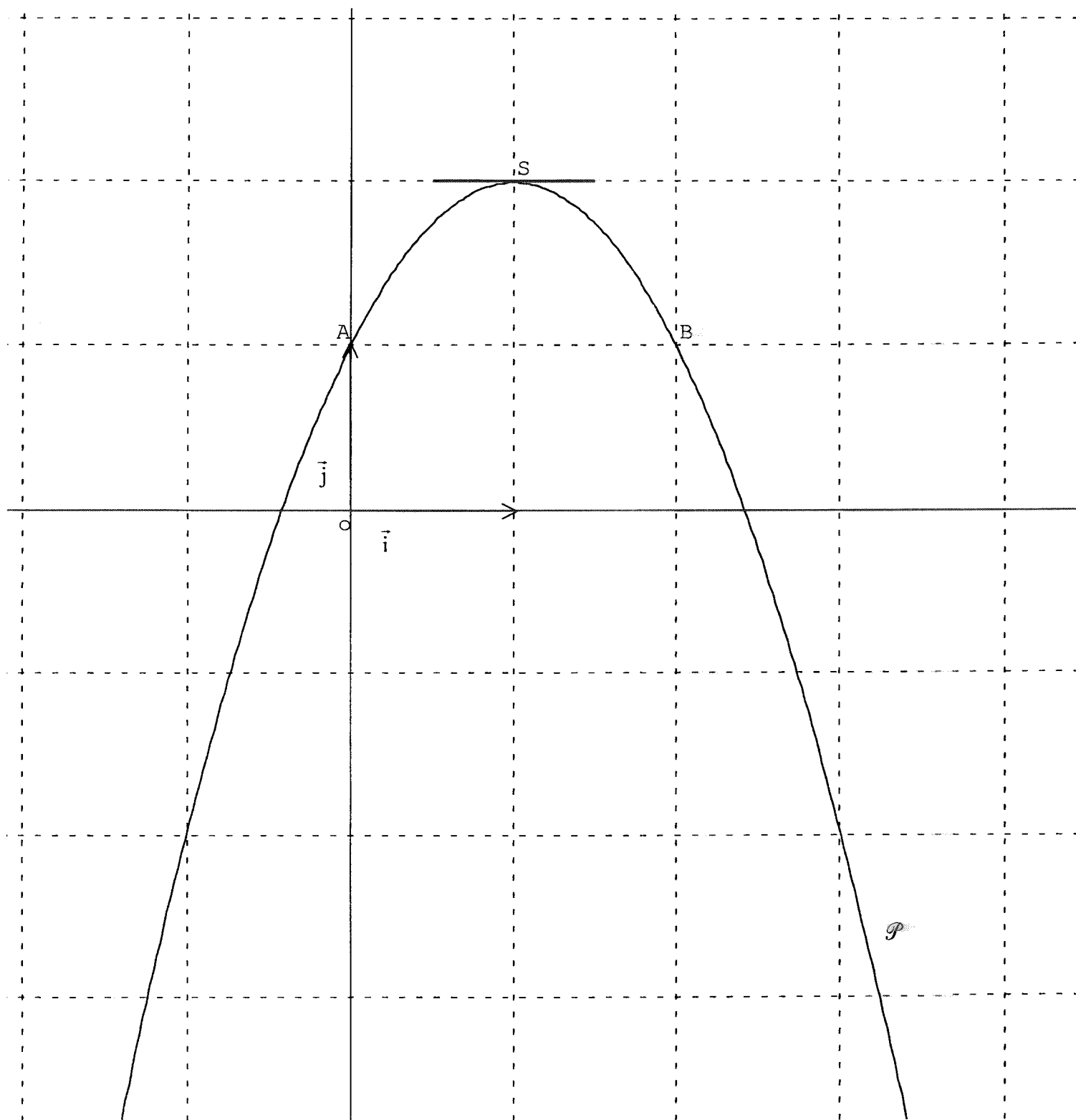
Partie C

On considère maintenant la fonction f définie sur $[0 ; 3]$ et telle que :

$$\text{si } 0 \leq x \leq 2 \text{ alors } f(x) = g(x)$$

$$\text{si } 2 \leq x \leq 3 \text{ alors } f(x) = h(x)$$

1. a) Sur le graphique de la partie B, reproduire la courbe $\mathcal{P}$ de la partie A, puis tracer en rouge la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f .
b) Construire sur le graphique la courbe $\mathcal{C}'$ symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.
2. Un publicitaire veut créer un logo dont le contour est formé par $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et l'axe des ordonnées. Prouver que l'aire de ce logo, en cm^2 , est $\mathcal{A} = 18(I + J)$. En donner la valeur exacte, puis une valeur approchée à 1mm^2 près.



FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad ; \quad P(\Omega) = 1 \quad ; \quad P(\emptyset) = 0$$

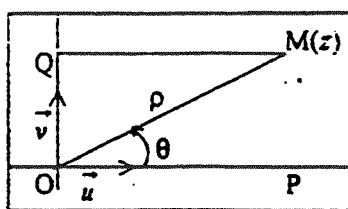
Dans le cas équiprobable : $P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leq x)$ Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (E(X))^2$ Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. NOMBRES COMPLEXES

Forme algébrique : $z = x + iy$ Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}, \rho > 0$ 

$$\vec{OM} = x \vec{u} + y \vec{v}$$

$$\overline{OP} = x = \operatorname{Re}(z) = \rho \cos \theta$$

$$\overline{OQ} = y = \operatorname{Im}(z) = \rho \sin \theta$$

$$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Opérations algébriques

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$

$$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Conjugué

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta} \quad ; \quad \bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad ; \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad ; \quad \overline{zz'} = \bar{z} \bar{z'}$$

$$z \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$$zz' = (\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'}) = \rho \rho' e^{i(\theta + \theta')}$$

$$|zz'| = |z| |z'|$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$$

Inégalité triangulaire

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

B. IDENTITÉS REMARQUABLES

(variables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

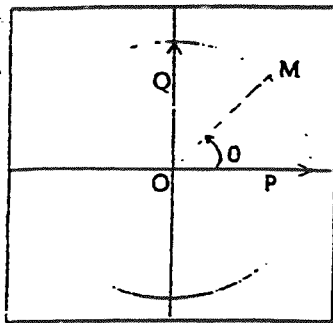
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad ; \quad a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$$

C. TRIGONOMETRIE



$$\overline{OP} = \cos \theta$$

$$\overline{OQ} = \sin \theta$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Les valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad ; \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

Formules d'addition

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a) \quad ; \quad \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$$

Formules de Moivre

$$\text{Pour tout entier naturel non nul } n, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$\text{soit encore } (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $ax^2 + bx + c = a(x - z_1)(x - z_2)$.

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

$$\text{Si } b \neq 1, \quad S_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$$

$$\text{Si } b = 1, \quad S_n = n + 1$$

III. ANALYSE

A. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\text{Si } x \in]-\infty, +\infty[\text{ et } y \in]0, +\infty[,$$

$$y = \exp x = e^x \text{ équivaut à } x = \ln y$$

$$e^0 = 1$$

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$$

$$(e^a)^b = e^{ab}$$

$$\ln a^x = x \ln a$$

2. Fonctions puissances

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$$

$$x^0 = 1$$

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$$

$$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

$$\text{Si } n \in \mathbb{N}^*, x \in [0, +\infty[\text{ et } y \in [0, +\infty[,$$

$$y = \sqrt[n]{x} \text{ équivaut à } x = y^n$$

B. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty ;$$

$$\text{si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0 ;$$

$$\text{si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty$$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x , $\sin x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

2. Suites (SÉRIES STL spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)

$$\text{Si } k > 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = +\infty ; \text{ si } 0 < k < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$$

C. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de validité
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty, +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

D. CALCUL INTÉGRAL

Si F est une primitive de f , alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

Positivité

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leq b$ et $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$

E. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Équations	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y' - \alpha y = 0$	$f(x) = ke^{\alpha x}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$