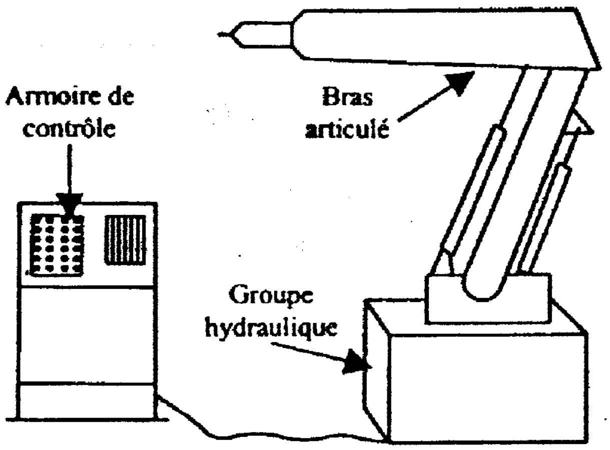
MAINTENANCE 2000 MIE3MAT

Exercice I

Les ateliers d'un grand constructeut d'automobiles comportent des robots permettant de positionner les pistolets de peinture autour de la carrosserie.
Ces robots sont constitués de trois parties : un bras articulé actionné par des vérins hydrauliques, un groupe hydraulique et une armoire de contrôle (système électronique qui gère les mouvements du robot par des programmes).
L'objectif de l'exercice est d'étudier la nature et la répartition des pannes.



Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

A. Pannes mécaniques sur le bras articulé.

Au moment de s'équiper de 300 robots équipés de bras articulés d'un certain type, le constructeur d'automobiles s'intéresse aux essais réalisés par son fournisseur lors de la mise au point des robots : la probabilité qu'un robot ait une panne mécanique sur son bras articulé pendant une période déterminée est alors 0,05 et les pannes mécaniques des bras des différents robots sont supposées indépendantes.

On prélève au hasard 300 robots dans le stock très important du fournisseur et on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de robots dont le bras a connu une panne mécanique pendant la période considérée.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.

2. On approche X par la variable aléatoire Y de loi normale de moyenne $\mu = 15$ et d'écart type $\sigma = 3,77$. Justifier le choix des paramètres μ et σ.

3. Soit E l'événement «lors de leur mise au point, strictement plus de 20 robots ont eu une panne mécanique sur leur bras articulé pendant la période considérée».
Calculer $P(Y \geq 20,5)$ à 10^{-2} près (c'est, en utilisant l'approximation de X par Y, la valeur de $P(E)$).

B. Défaillances des groupes hydrauliques.

Un tiers des robots des ateliers de peinture du constructeur d'automobiles est équipé d'un modèle M_1 de groupe hydraulique, alors que les deux autres tiers bénéficient d'un modèle M_2, plus récent. La probabilité, une semaine donnée, qu'une défaillance se produise par manque de pression est 0,03 pour un modèle M_1 et 0,02 pour un modèle M_2.

A la fin d'une semaine, on choisit au hasard un groupe hydraulique. On note A l'événement «le groupe choisi est de type M_1», B l'événement «le groupe choisi est de type M_2»et D l'événement «le groupe choisi a été défaillant durant la semaine».

On a donc $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{2}{3}$; $P(D/A) = 0,03$ et $P(D/B) = 0,02$.

1 . En remarquant que $D = (A \cap D) \cup (B \cap D)$ et que $A \cap D$ et $B \cap D$ sont incompatibles, calculer $P(D)$, à 10^{-3} près.

2. On constate qu'un groupe hydraulique tiré au hasard a été défaillant. Quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il s'agisse d'un modèle M_1, c'est à dire $P(A/D)$?

C . Maintenance du système électronique des armoires de contrôle.

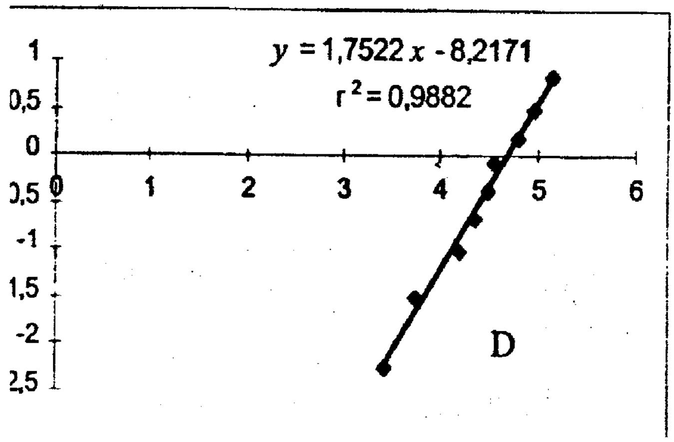
Le service de maintenance préconise, pour les armoires de contrôle, des interventions préventives (par changement de certains éléments électroniques). La période de ces interventions sera déterminée à partir d'un historique de pannes d'une armoire de contrôle choisie au hasard.

Les neuf premiers temps de bon fonctionnement (en jours) de cette armoire de contrôle sont les suivants (rangés en ordre croissant) : 31 ; 42 ; 67 ; 77 ; 89 ; 95 ; 122 ; 144 ; 173 .

Soit T la variable aléatoire qui, à toute armoire de contrôle, associe son temps de bon fonctionnement. On cherche à ajuster la loi de T à une loi de Weibull.

A l'aide d'un tableur, on a obtenu le tableau et le graphique ci-dessous, où $F(t_i)$ et $R(t_i)$ correspondent respectivement à défaillance et à la fiabilité au temps t_i (selon la méthode des rangs moyens)

t_i	$F(t_i)$	$R(t_i)$	$x_i = ln(t_i)$	$y_i = ln[-lnR(t_i)]$
31	0,1	0,9	3,4338720	-2,25036733
42	0,2	0,8	3,73766962	-1,4999399
67	0,3	0,7	4,20469262	-1,03093043
77	0,4	0,6	4,34380542	-0,67172699
89	0,5	0,5	4,48863637	-0,36651292
95	0,6	0,4	4,55387689	-0,08742157
122	0,7	0,3	4,8040,2104	0,18562676
144	0,8	0,2	4,96981330	0,47588500
173	0,9	0,1	5,15329159	0,83403245



Sur le graphique ci-dessus, figure la droite de régression D de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés, avec son équation dans un repère orthogonal, ainsi que le carré r^2 du coefficient de corrélation linéaire.

On admet le résultat suivant qui n'a donc pas à être démontré ici :

$$R(t) = e^{-\frac{t}{\eta}^{\beta}} \text{ équivaut à } y = \beta x - \beta ln\eta \text{ , où l'on a posé } \quad x = Int \quad \text{et } y = ln[-InR(t)].$$

1 . Déduire des informations précédentes les résultats ci-dessous :

a) Le nuage des points de coordonnées (x_i, y_i) est correctement ajusté par cette droite D

b) On peut considérer que T suit une loi de Weibull de paramètre $\gamma = 0$;

c) On peut prendre, pour les deux autres paramètres, $\beta = 1,75$ (arrondi au centième) et $\eta = 109$ (arrondi à l'unité).

(On pourra utiliser l'équivalence encadrée ci-dessus.)

2. Déterminer, par le calcul, la périodicité d'interventions préventives basée sur une fiabilité de 80%.

EXERCICE 2 (10 points)

L'objectif de cet exercice est de résoudre une équation différentielle dont une solution particulière est susceptible de définir une fonction de densité en probabilités.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

A . Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y = -\frac{16}{3}e^{-2x}$ où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1^o Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_0) : y" - 4y = 0$.

2^o Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3^o En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4^o Déterminer la solution particulière h de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions

$$h(0) = \frac{4}{3} \qquad \text{et} \qquad h'(0) = -\frac{4}{3}$$

B. Etude d'une fonction

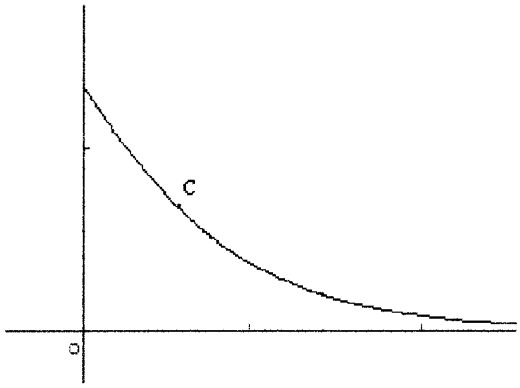
Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{4}{3}(1 + x)e^{-2x}$.

Une représentation graphique C de f, dans un repère orthogonal, est donnée ci-contre.

1° Le graphique suggère un sens de variation pour la fonction f. L'objet de cette question est de justifier ce résultat.

a) Démontrer que, pour tout x de $[0, +\infty[$, $f'(x) = -\frac{4}{3}(2x + I)e^{-2x}$.

b) En déduire le sens de variation de f sur $[0), +\infty[$.



2° Le graphique permet d'envisager une asymptote en $+\infty$ pour la courbe C. A partir de l'expression de $f(x)$, déterminer une limite de f justifiant cette propriété graphique.

3° a) A l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponen~~tie~~lle $t \mapsto e^t$, donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonct~~ion~~ : $x \mapsto e^{-2x}$.

b) En déduire que le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{8}{9}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

c) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et T, pour x positif au voisinage de 0.

4° a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_0^3 f(x)dx$$

Donner une valeur approchée, arrondie au centième, de l'intégrale I.

Donner une interprétation graphique de l'intégrale I.

b) Sur l'écran d'une calculatrice, équipée d'un logiciel particulier (calcul formel), on lit le résultat suivant, où t est un nombre réel positif quelconque :

$$\int_0^t f(x)dx = (-\frac{2}{3}t - 1)e^{-2t} + 1$$

Ce résultat est admis ici et n'a donc pas à être démontré.

Déterminer $\lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{2}{3}t - 1\right) e^{-2t}$.

c) Soit $A(t)$ l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par les axes de coordonnées, la courbe C, et la droite d'équation $x = t$ où t est un nombre réel positif

Déterminer $J = \lim_{t \to +\infty} A(t)$.

d) Déterminer la valeur exacte de $J - I$ où $I = A(3)$ a été calculé à la question 4° a), et en déduire la double inégalité : $0 \geq J - I \geq 10^{-2}$. Donner, à l'aide d'une phrase, une interprétation graphique de $J - I$.