

Exercice 1

Les parties A et B sont indépendantes

A - Résolution d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle : (E) $y'' + 4y' + 5y = 0$ où y est une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R}

1° Résoudre cette équation différentielle (E).

Déterminer la fonction f solution particulière de (E) vérifiant les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = -2$.

B - Recherche d'un développement limité et calcul intégral

1° Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de zéro, de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-2x} \cos x$.

2° Soit P le polynôme défini sur \mathbb{R} par $P(x) = 1 - 2x + \frac{3}{2}x^2$.

Soit α nombre réel strictement positif, calculer en fonction de α l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^\alpha P(x) dx$.

3° a) En vous aidant de l'équation différentielle (E), montrer que la fonction f vérifie pour tout réel x de \mathbb{R} : $f(x) = \frac{1}{5}[-f''(x) - 4f'(x)]$.

b) Soit H la fonction définie par $H(x) = \frac{1}{5}[-f'(x) - 4f(x)]$. Calculer $F'(x)$, en déduire une primitive de f .

c) Soit α nombre réel strictement positif, calculer en fonction de α l'intégrale $J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$.

4° Montrer que, pour $\alpha = 0,4$ l'erreur relative $\frac{J(\alpha) - I(\alpha)}{J(\alpha)}$ commise en prenant $I(\alpha)$ comme valeur approchée de $J(\alpha)$ est en valeur absolue, inférieure à 1%.

Exercice 2

Seules les parties B et C ne sont pas indépendantes.

Dans cet exercice on donnera les valeurs approchées de tous les résultats à 10^{-2} près.

Un distributeur automatique élabore du Jus d'orange en mélangeant de l'eau et du concentré d'orange.

A - Vous êtes chargé d'approvisionner chaque matin l'appareil en concentré.

La variable aléatoire X qui, à chaque jour pris au hasard associe la quantité en litres de concentré consommé ce jour, suit la loi normale de paramètres $m = 15$ et $\sigma = 1,5$.

1° Calculer la probabilité que la consommation de concentré dans une Journée, prise au hasard, soit comprise entre 13 et 16.

2° Trouver le nombre réel h tel que $P(X < h) = 0,95$.

B - Le plein de concentré étant réalisé chaque matin, on suppose maintenant que la probabilité qu'un jour pris au hasard la machine soit hors service par manque de concentré est $p = 0,05$. Les pannes sont supposées indépendantes les unes des autres.

1° Montrer que la variable aléatoire Y qui, à toute période de 30 jours associe le nombre de jours où le distributeur est hors service par manque de concentré, suit une loi binomiale. Quels sont ses paramètres ?

2° On approche cette loi par une loi de Poisson. Quel est son paramètre ?

Déterminer la probabilité qu'il y ait plus de deux mises hors service du distributeur, en un mois de 30 jours, par manque de concentré. Pour simplifier, on considérera que si le distributeur est victime le même jour d'une panne mécanique et d'une panne de concentré, il s'agit quand même de pannes distinctes.

C - Vous êtes également chargé de la maintenance du distributeur.

1° Une enquête a montré que la variable aléatoire Z qui, à toute période de 30 jours associe le nombre de pannes mécaniques du distributeur, suit la loi de Poisson telle que : $P(Z = 1) = 6P(Z = 3)$. Démontrer que le paramètre de cette loi de Poisson est : $\lambda = 1$.

2° On suppose que les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes.

a) Déterminer la probabilité de l'événement : « $Y = 1$ et $Z = 1$ ».

b) Déterminer la probabilité de l'événement « le distributeur est hors service deux fois exactement en un mois de 30 jours, le hors service se produisant par manque de concentré ou par défaillance mécanique du

distributeur et ce de façon indépendante.

D - Une étude de fiabilité de ce type de distributeur a permis d'obtenir le tableau suivant où t_i est le temps de bon fonctionnement exprimé en jours et $F(t_i)$ le pourcentage cumulé de distributeurs hors d'usage à l'instant t_i .

t_i (en jours)	40	48	55	60	64	68	80
$F(t_i)$ (en%)	12,5	25	37,5	50	62,5	75	87,5

1° Placer les points de coordonnées $(t_i, F(t_i))$ sur le papier de Weibull fourni en annexe.

Expliquer pourquoi cette distribution peut être ajustée par une loi de Weibull dont on déterminera les paramètres. Calculer la MTBF

2° Déterminer par le calcul et graphiquement la périodicité d'un entretien systématique reposant sur une fiabilité de 90 % .