

Exercice 1

La variation du paramètre de forme β permet d'ajuster une grande quantité de distributions expérimentales à une loi de Weibull. On désigne par f_β la fonction de densité et par F_β la fonction de défaillance de la variable aléatoire T suivant une telle loi.

On désigne par C_β la courbe représentative de f_β dans un repère orthogonal $(0; \vec{i}, \vec{j})$, les unités graphiques étant de 5 cm sur l'axe des abscisses et de 10 cm sur l'axe des ordonnées.

Dans cet exercice on considère les deux cas $\beta = 1$ et $\beta = 2$ lorsque les deux autres paramètres de la loi de Weibull sont $\eta = 1$ et $\gamma = 0$.

1° Etude du cas $\beta = 1$:

On rappelle que la fonction f_1 et la fonction F_1 sont alors définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_1(t) = e^{-t} \quad \text{et} \quad F_1(t) = \int_0^t f_1(x) dx$$

- Construire la courbe C_1 dans le repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$. On ne demande pas l'étude de la fonction f_1 .
- Calculer, en fonction de t , l'intégrale $F_1(t)$ et en déduire la probabilité $P(T \leq 1)$ à 10^{-3} près.
- Calculer $I(t) = \int_0^t x f_1(x) dx$. (On pourra effectuer une intégration par parties).

Déterminer l'espérance mathématique $E(T) = \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t)$.

2° Etude du cas $\beta = 2$:

On rappelle que la fonction f_2 et la fonction F_2 sont alors définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_2(t) = 2te^{-t^2} \quad \text{et} \quad F_2(t) = \int_0^t f_2(x) dx.$$

- On admet que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_2(t) = 0$. Etudier le sens de variation de f_2 .
- En posant $u = -t^2$ et en utilisant le développement limité à l'ordre 1 de e^u au voisinage de 0, démontrer que le développement limité à l'ordre 3 de f_2 au voisinage de 0 est défini par :

$$f_2(t) = 2t - 2t^3 + t^3 \varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0.$$

En déduire une équation de la tangente D à C_2 au point d'abscisse 0, et la position relative de D et de C_2 au voisinage de ce point.

- Construire la tangente D et la courbe C_2 dans le repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$ utilisé au 1°.
- Démontrer que $F_2(t) = 1 - e^{-t^2}$ et en déduire la valeur de t telle que $P(T \leq t) = 0,05$.

Exercice 2

Un tour à commande numérique fabrique en grande série des cylindres.

Dans un premier temps le service de maintenance décide d'établir une carte de contrôle qui permette de décider du moment où il est nécessaire de régler le tour.

Dans un deuxième temps le service de maintenance décide d'utiliser cette carte de contrôle pour relever les temps écoulés entre deux réglages successifs du tour et obtenir ainsi un fichier historique permettant de déterminer une périodicité de réglage systématique basée sur une fiabilité de 90 %

A) Première partie : Définition de la carte de contrôle.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque cylindre prélevé au hasard dans la production, associe son diamètre.

On admet que X suit la loi normale de moyenne $m = 40$ mm et d'écart type $\sigma = 0,045$ mm.

Soit $\bar{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 5 cylindres prélevés au hasard et avec remise, associe la moyenne des diamètres de cet échantillon.

1° Justifier que la variable aléatoire $\bar{X}$ suit la loi normale de moyenne $E(\bar{X}) = 40$ mm et d'écart type $\sigma' = 0,020$ mm à 10^{-3} près.

2° Calculer, à 10^{-2} près, les probabilités

$$p_1 = P(m - 2\sigma' \leq \bar{X} \leq m + 2\sigma') ; \quad p_2 = P(m - 3\sigma' \leq \bar{X} \leq m + 3\sigma') ; \quad p_3 = P(\bar{X} \leq 39,95).$$

3° Sur la carte de contrôle représentée ci-dessous sont placées les zones de surveillance et de réglage : la zone de surveillance correspond aux moyennes d'échantillons comprises entre 39,94 et 39,96 ou entre 40,04 et 40,06 ; la zone de réglage correspond aux moyennes d'échantillons inférieures à 39,94 ou supérieures à 40,06.

Quelle est à 10^{-2} près, la probabilité p_4 qu'un échantillon de 5 cylindres prélevés au hasard et avec remise ait sa moyenne placée dans la zone de surveillance.

moyenne d'échantillon 40,06	Zone de réglage
40,04	Zone de surveillance
40	
	numéro d'échantillon
39,96	Zone de surveillance
39,94	Zone de réglage

B) Deuxième partie : Détermination de la périodicité de réglage systématique.

L'équipe de maintenance a relevé pendant plusieurs mois les temps de fonctionnement en heures, entre deux réglages consécutifs du tour et a établi le tableau suivant :

t_i (en heures)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$F(t_i)$ (en %)	10	15	23	30	40	50	63	74	84	92	95

où t_i représente le temps de fonctionnement entre deux réglages consécutifs et $F(t_i)$ le pourcentage cumulé de réglages effectués avant le temps t_i .

1° Placer les points de coordonnées $(t_i, F(t_i))$ sur le papier de Weibull qui vous est fourni.

Expliquer pourquoi cette distribution peut être ajustée par une loi de Weibull dont on déterminera les paramètres. Donner l'expression de $R(t)$.

2° Calculer la MTBF et la probabilité de ne pas avoir de réglage à faire avant cette MTBF.

3' Déterminer graphiquement et par le calcul la périodicité de réglage systématique basée sur une fiabilité de 90 % .