MAINTENANCE 1996 FDJMA6

Exercice 1

Les parties I et Il peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

I. Résolution d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle : (E) $\quad (1+t^2)x' + 2tx = 0$

où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivablc sur $\mathbb{R}$ et où x' est la fonction dérivée de x.

1° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).

2° Déterminer la fonction f. Solution particulière de l'équation (E). Vérifiant $f(0) = 1$

II. Calcl intégral

On pose : $A = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$, $\quad B = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt, \quad C = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt$

1° a) Montrer que $A = \frac{\pi}{4}$

b) Montrer que $B = \frac{1}{2}In2$

2° a) Vérifier que, pour tout nombre réel t on a : $\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$

b) Déduire du 1° la valeur exacte de C.

III. Application

Dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f définie sur $[0\ ,\ 1]$ par $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$

Une plaque homogène est délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $t = 0$ et $t = 1$.

Le moment d'inertie de cette plaque par rapport à la droite d'équation $t = 1$ est donné par :

$$M = \int_0^1 (1-t)^2 f(t)dt.$$

1° Montrer que $M = A - 2B + C$.

2° A l'aide de la partie II. calculer la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près de M

(Le tracé de la courbe $\mathcal{C}$ n'est pas demandé.)

Exercice 2

Les questions I et II peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Un groupe industriel posséde deux filiales MAT et MATIC qui produisent des petits moteurs destinés au montage de jouets.

I. La variable aléatoire X qui, à chaque moteur tiré au hasard dans la production, associe sa durée vie exprimée en heures suît la loi normale de moyenne 400 et d'écart type 40.

1° Un moteur est déclaré non commercialisable si sa durée de vie est inférieure à 318 heures.

Calculer, à 10^{-4} près, la probabilité p qu'un moteur prélevé au hasard dans la production ne soit pas commercialisable.

2° On admet que $p = 0,02$. Soit Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 50 moteurs, associe le nontre de moteurs non commercialisables, La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler le prélèvement de 50 moteurs à un prélèvement aléatoire avec remise .

a) Quelle est la loi suivie par Y ? Justifier la réponse et donner ses paramètres.

Calculer à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement : «il y a exactement deux moteurs non commercialisables».

b) On admet que la loi précédente peut être approchée par une loi de Poisson. Préciser son paramètre. Calculer à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement : «il y a au plus trois moteur non commercialisables»

II. La filiale MAT prélève un échantillon de taille 100 sur la production d'un jour et mesure la durée de vie, en heures, des moteurs. Les résultat obtenus sont les suivants :

Durée de vie	[300 , 340[	[340 , 380[	[380 , 420[	[420 , 460[	[460 ,500[
Effectifs	7	21	48	16	8

1° En faisant l'hypothèse que les valeurs mesurées sont celles du centre de classe, calculer, à 10^{-2} près la moyenne m_1 et l'écart type σ_1 de cette série statistique.

La filiale MATIC, dans des conditions similaires. contrôle un échantillon de taille 100 et obtient pour résultats $m_2 = 406.8$ et $\sigma_2 = 40,5$.

2° On désigne par $\overline{X_1}$ la variable aléatoire qui. à chaque échantillon de 100 moteurs prélevés au hasard par la filiale MAT, associe sa moyenne et par $\overline{X_2}$ la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 moteurs prélevés au hasard par la filiale MATIC, associe sa moyenne.

Tous les échantillons considérés sont assimilés à des échantillons prélevés avec remise.

On suppose que les variable aléatoires $\overline{X_1}$, $\overline{X_2}$, $D = \overline{X_1} - \overline{X_2}$ suivent des des lois normales demoyennes respectives M_1, M_2, $M_1 - M_2$ inconnues et on estime l'écart type de D par

$\sigma_D = \sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{100}}$. (On prend comme valeur approchée à 10^{-1} près de σ_1 la valeur 39,4).

On décide de construire un test bilatéral pormettant de savoir s'il existe une différence significative au seuil de 5% entre les durées de vie des moteurs fabriqués par les filiales MAT et MATIC

On choisit pour hypothèse $H_0 : M_1 = M_2$, et pour hypothèse alternafive $H_1 : M_1 \neq M_2$.

a) Sous l'hypothèse H_0, D suit la loi normale $\mathcal{N}(0 , \sigma_D)$. Déterminer l'intervalle $[-h , h]$ tel $P(-h \leq D \leq h) = 0,95$.

b) Enoncer la règle de décision du test.

c) Utiliser ce test avec les deux échantillons de l'énoncé et conclure.