BTS MAINTENANCE (SESSION 1995)

Ex 1 : *Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*

Soit (E) l'équation différentielle: $y'+xy = x^2 e^{-x}$

où y est une de la variable x définie sur □, et où y' est la fonction dérivée de y.

A.1. Résoudre l'équation différentielle (E_0): $y' + xy = 0$

2. Déterminer deux nombres réels a et b pour que la fonction h définie sur □ par $h(x) = (ax + b).e^{-x}$ soit une solution particulière de l'équation (E).

3. Déduire de 1 et 2 la solution générale de l'équation (E).

B Soit f la fonction définie sur □ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$ et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Ecrire le développement limité d'ordre 2 de la fonction f au voisinage de 0.

2. En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et de T au voisinage de ce point.

Ex 2 : *Les parties A, B, C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.*

Une usine assure le conditionnement d'un très grand nombre de bouteilles d'un certain type. On désigne par X la variable aléatoire qui, à toute bouteille prise au hasard, associe sa contenance exprimée en litres. On admet que lorsque la machine est bien réglée X suit la loi normale de moyenne 1 et d'écart-type 0,01.

A.1.a) Quelle est, à 10^{-4} près, la probabilité p_1 pour que la contenance d'une bouteille soit inférieure à 0,98?

b)Quelle est, à 10^{-4} près, la probabilité p_2 pour que la contenance d'une bouteille soit supérieure à 1,025?

2. Les bouteilles sont réunies en paquets de 6. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque paquet, tiré au hasard dans la production, associe le nombre de bouteilles de contenance inférieure à 0,98; on suppose les tirages des 6 bouteilles faits avec remise et on prend $p_1 = 0{,}023$.

a) Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

b) Quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité p_3 que, dans un paquet, la contenance d'au moins une bouteille soit inférieure à 0,98?

B. On effectue régulièrement des prélèvements aléatoires d'échantillons de 100 bouteilles, les tirages pouvant être considérés comme faits avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon, associe la contenance moyenne des 100 bouteilles de cet échantillon.

1. Si la machine est bien réglée:

a) Quelle est la loi suivie par $\overline{X}$?

b) Déterminer à 10^{-3} près par excès le réel h tel que $P(1 - h \leq \overline{X} \leq 1 + h) = 0{,}95$.

2. En utilisant la question **B.1**, construire un test bilatéral permettant d'accepter ou de rejeter, au seuil de 5%, l'hypothèse selon laquelle la machine est bien réglée. (Quand la machine est bien réglée on sait que X suit la loi normale de moyenne $m = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}01$).

3. Sur un échantillon de 100 bouteilles, on a les résultats suivants:

contenance	0,980	0,985	0,990	0,995	1	1,005	1,010	1,015	1,020
nombre de bouteilles	3	7	20	23	22	16	6	2	1

a) Calculer la moyenne X_e de cet échantillon.

b) Au vu de ce résultat peut-on, au seuil de risque de 5%, conclure que la machine est bien réglée?

C. Détermination de la périodicité de réglage systématique des machines de conditionnement.

L'équipe de maintenance a relevé durant une année les temps de fonctionnement, en heures, entre deux réglages consécutifs d'une des machines de conditionnement et a obtenu les temps de bon fonctionnement, rangés en ordre croissant, suivants: 30; 50;90;130;170;230;300;410;580.

1. A l'aide de la méthode des rangs moyens compléter le tableau suivant :

TBF t_i	$F(ti)$	$R(t_i)$	$y_i = \ln R(t_i)$
....	....	....	....

2. A l'aide de la calculatrice, déterminer une équation $y = at + b$ de la droite d'ajustement des valeurs de y à celles de t, ainsi que le coefficient de corrélation entre t et y .

3. En prenant pour valeurs approchées: $a = -0{,}004$ et $b = 0$ donner l'expression de $R(t)$.
En déduire la loi suivie par la variable aléatoire mesurant la durée de bon fonctionnement.
Calculer la *MTBF* (moyenne des temps de bon fonctionnement).

4. Déterminer par le calcul la périodicité de réglage systématique basée sur une fiabilité de 80%.