MAINTENANCE CDO MP1 1994

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

L'épreuve comporte deux exercices indépendants

EXERCICE 1 (9 points) -

Les parties A et B sont indépendantes.

A. Soit l'équation différentielle (E) : $(I+x)y' - y = In\left(\frac{1}{1+x}\right)$ où y est une fontion de la variable réelle x, définie et dérivable sur $[0\ ,\ +\infty[$. (In désigne la fonction logarithme néperien).

1° Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E') : $(I+x)y' - y = 0$.

2° Déterminer la fonction f, solution particulière de l'équation (E), définie sur $[0\ ,\ +\infty[$ par : $f(x) = ln(1+x) + C$, où C est une constante réelle à déterminer.

3° En déduire la solution générale de l'équation (E).

4° Déterminer la fonction φ, solution de l'équation (E) vérifiant : $\varphi(0) = 0$.

B. On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ inconnu telle que : $P(X \leq 1) = 0,95$.

1° Démontrer que λ, est solution de l'équation $ln(1+x) - x = ln(0,95)$.

2° Etudier les variations de la fonction φ définie sur $[0\ ,\ +\infty[$ par : $\varphi(x) = ln(1+x) - x$.

En déduire que l'équation du 1° admet une solution unique, λ, dans $[0\ ,\ +\infty[$.

Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de λ

EXERCICE 2 (11 points)

On étudie la durée de vie d'un ceriain type de composants électriques fabriques par une usine.

On désigne par T la variable aléatoire qui à chaque composant, prélevé au hasard dans la production, associe sa durée de vie exprimée en mois.

Après une étude statistique, on admet que T suit la loi de Weibull de paramètres :

$\gamma = 0$; $\beta = 2,4$; $\eta = 50$.

1° Représenter sur le papier de Weibull fourni en annexe la fonction de défaillance F correspondante.

2° Déterminer graphiquement à 1% près les probabilités des événements suivants

a) la durée de vie d'un composant est inférieure à 10 mois

b) la durée de vie d'un composant est comprise entre 10 mois et 50 mois

3° Déterminer par Ie calcul, puis à l'aide du graphique, le temps au bout duquel un composant doit être changé, sachant que sa probabilité de survie doit rester supérieue à 90%.

Comparer les deux résultats.

4° un système (S) est constitué de deux composants du type précédent, montés en série et fonctionnant de manière indépendante (le système (S) est donc défaillant dès qu'un de ses composants l'est).

Déterminer le temps au bout duquel (S) doit être changé, sachant que la probabilité de survie de (S) doit rester supérieure à 90%.