

MAINTENANCE 1993 BXQ MP1

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies

L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

L'épreuve comporte deux exercices indépendants.

EXERCICE - 1 (10 points)

On considère les équations différentielles :

$$(E) \quad y'' - 2y' + 2y = 0$$

$$\text{et } (E') \quad y'' - 2y' + 2y = \frac{2x^3}{3} - 2x^2$$

où y est une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} de la variable réelle x .

1 - Résoudre l'équation différentielle (E)

2 - Déterminer des réels a, b, c, d tels que la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ soit une solution de (E').

3 - Déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation (E').

4 - On appelle ϕ la solution de (E') dont la représentation graphique passe par l'origine du repère et admet pour tangente en ce point l'axe des abscisses.

$$\text{Montrer que } \phi(x) = e^x \cos x + \frac{x^3}{3} - x - 1$$

5 - Ecrire le développement limité d'ordre 4 de $\phi(x)$ au voisinage de zéro.

En déduire la position de la courbe représentative de ϕ par rapport à l'axe des abscisses au voisinage du point d'abscisse zéro.

EXERCICE - 2 (10 points)

Une machine fabrique des tiges en grande série.

1 - L'intervalle de tolérance pour la longueur, exprimée en cm, de ces tiges est $[24,50 ; 25,50]$.

On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tige associe sa longueur.

Après un réglage, X suit la loi normale de moyenne 25 et d'écart-type σ . Quel doit être cet écart type pour que la proportion de pièces acceptables soit 90 % ?

On suppose dans la suite du problème que la proportion de pièces acceptables fabriquées par cette machine est de 90%

2 - Pour effectuer un contrôle on tire au hasard 10 tiges de la production. On désigne par Y la variable aléatoire qui à chaque tirage de 10 tiges associe le nombre de tiges acceptables.

a) Montrer que Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres. Donner son espérance mathématique.

b) Quelle est la probabilité que dans un échantillon de 10 tiges prélevées au hasard dans la production, toutes les tiges de cet échantillon soient acceptables ?

3 - La machine est supposée bien réglée quand la proportion de pièces acceptables est supérieure ou égale à 90 %.

Pour contrôler le réglage de la machine on prélève de temps en temps des échantillons aléatoires de 150 tiges et on construit un test permettant de décider si, au seuil de 5 %, la machine est bien réglée.

a) Construction du test unilatéral :

Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon aléatoire de 150 tiges associe le pourcentage de tiges acceptables dans cet échantillon.

F suit la loi normale de moyenne p proportion de tiges acceptables dans la population et d'écart-type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{150}}$

On choisit pour hypothèse nulle $H_0 : p = 90\%$ et pour hypothèse alternative $H_1 : p < 90\%$.

Déterminer le nombre réel h tel que sous l'hypothèse H_0 $P(F > h) = 0,05$.

Enoncer la règle de décision de ce test.

b) Utilisation de ce test :

On prélève un échantillon aléatoire de 150 tiges. On trouve 22 tiges défectueuses.

Quel est le pourcentage de tiges acceptables de cet échantillon ?

En appliquant la règle de décision à cet échantillon non exhaustif, peut-on conclure, au seuil de 5 %, que la machine est bien réglée ?