MAINTENANCE 1992 ZTW-MP1

EXERCICE 1 (9 points)

Soit (E) l'équation différeritielle : $x'' + 9x = 2cos\omega t$ où l'inconnue x est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et ω un paramètre réel positif ou nul.

1- Résoudre l'équation (E_0) : $x'' + 9x = 0$

2 - Résoudre l'équation (E) dans le cas où $\omega \neq -3$.

On cherchera une solution particulière x_1, telle que :

$x_1(t) = A.cos\omega t$ où A est une fonction de ω.

3 - Résoudre l'équation (E) dans le cas particulier où $\omega = 3$.

Soit (E_1) : $x'' + 9x = 2.cos3t$

On cherchera une solution particulière x_2 telle que :

$x_2(t) = t.(C_1 cos3t + C_2 sin3t)$

C_1 et C_2 étant deux nombres réels à déterminer.

EXERCICE 2 (11 points)

1- Des pièces métalliques de forme parallélépipédique sont fabriquées par des machines pour lesquelles l'étude des temps de bon fonctionnement, exprimés en mois, conduit à la fonction de fiabilité R telle que :

$$R(t) = (0,05t + 1)e^{-0,1.t}$$

a) Calculer $R'(t)$ et vérifier ainsi que la fonction R est bien strictement décroissante sur $[0, +\infty[$

b) Calculer à 10^{-2} près :

la probabilité qu'une machine fonctionne plus de 10 mois.

la probabilité qu'une machine tombe en panne au cours de la première année.

c) Sachant que la $MTBF$ est donnée par la formule :

$$MTBF = \int_0^{+\infty} R(t)dt = \lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^{\alpha} R(t)dt$$

Calculer à l'aide d'une intégration par parties

$I_\alpha = \int_0^\alpha R(t)dt$

en déduire la MTBF (on admettra que : $\lim_{\alpha \to +\infty} \alpha.e^{-0,1\alpha} = 0$).

2 - On désigne par x, y, z les dimensions, exprimées en centimètres, des pièces fabriquées par les machines. On suppose que :

les variables aléatoires X et Y qui à chaque pièce associent respectivement leurs dimensions x et y suivent la loi normale de moyenne 10 et d'écart-type 0,05

la variable aléatoire Z qui à chaque pièce associe sa dimension z suit la loi normale de moyenne 7 et d'écart-type 0,02.

a) une pièce étant tîré au hasard, calculer les probabilités :

$p_1 = P(9,9 < X < 10,1)$; $p_2 = P(9,9 < Y < 10,1)$; $p_3 = P(6,95 < Z < 7,05)$

b) une pièce est acceptable si ses dimensions sont telles que :

$$\begin{cases} 9,9 & \leq x \leq & 10,1 \\ 9,9 & \leq y \leq & 10,1 \\ 6,95 & \leq z \leq & 7,05 \end{cases}$$

X, Y, Z étant supposées indépendantes, calculer la probabilité qu'une pièce soit acceptée.