BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2009

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B *CODE : MATGRB1*

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENT
Aménagement finition	2
Après-vente automobile	2
Assistance technique d'ingénieur	2
Bâtiment	2
Conception et réalisation de carrosseries	2
Construction navale	2
Constructions métalliques	2,5
Domotique	2
Enveloppe du bâtiment : façade – étanchéité	2
Etudes et économie de la construction	2
Fluides – énergies – environnements	2
Géologie appliquée	1,5
Industrialisation des produits mécaniques	2
Maintenance et après-vente des engins de travaux publics et de manutention	1
Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques	1
Maintenance industrielle	2
Mécanique et automatismes industriels	2
Moteurs à combustion interne	2
Traitement des matériaux	3
Travaux publics	2

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (12 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 8\,e^x$.
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur R, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Déterminer les solutions définies sur R de l'équation différentielle (E_0) :
$$y'' - 2y' + y = 0.$$

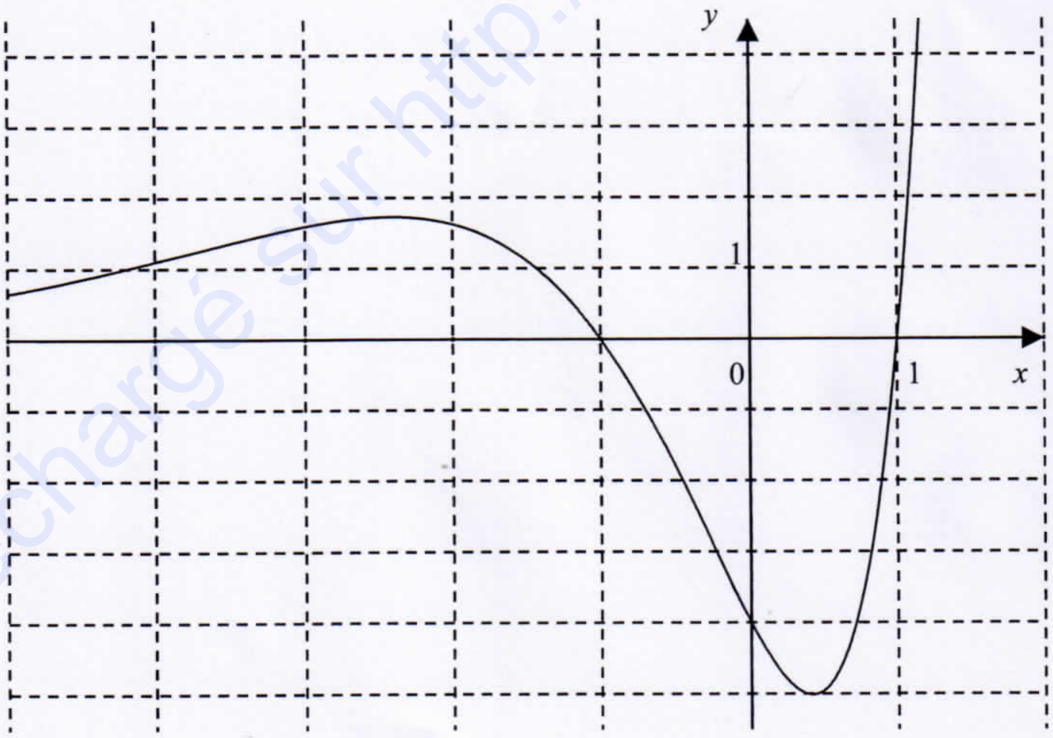
2° Soit h la fonction définie sur R par $h(x) = 4x^2 e^x$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (4x^2 - 4)\,e^x$. Sa courbe représentative C dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



1° a) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = 4(x^2 + 2x - 1)\,e^x$.

b) Donner sans justification la valeur exacte et la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de l'abscisse de chacun des points de la courbe C où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

2° a) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = -4 - 4x + 2x^2 + x^2\,\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

b) Déduire du a) une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

c) Étudier la position relative de C et T au voisinage du point d'abscisse 0.

C. Calcul intégral

Dans cette partie, les questions 1° et 2° peuvent être traitées de façon indépendante.

1° La fonction f définie au début de la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.
Donc, pour tout x de R, $f(x) = -f''(x) + 2f'(x) + 8\,e^x$.
En déduire une primitive F de la fonction f sur R.

2° a) Donner, sans justification, le signe de $f(x)$ sur l'intervalle [0, 1].

b) Dans cette question, on admet que la fonction F définie sur R par
$F(x) = (4x^2 - 8x + 4)\,e^x$ est une primitive de la fonction f.
Déduire de ce qui précède l'aire A, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

EXERCICE 2 (8 points)

Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes.

On s'intéresse au chantier de construction d'un tronçon de TGV.
Les travaux de terrassement nécessitent la mise à disposition d'une flotte importante de pelles sur chenilles et de camions-benne.
La réalisation de l'ouvrage nécessite de grandes quantités de fers à béton.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

A. Loi normale

On note X la variable aléatoire qui, à chaque pelle prélevée au hasard dans la flotte, associe le nombre de m^3 de matériaux extraits pendant la première heure du chantier. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 120 et d'écart type 10.

1° Calculer $P(110 \leq X \leq 130)$.

2° Calculer la probabilité que la pelle prélevée extraie moins de 100 m^3 pendant la première heure du chantier.

B. Loi de Poisson

On note Y la variable aléatoire qui, à toute heure travaillée prise au hasard pendant la première semaine du chantier, associe le nombre de camions-benne entrant dans la zone 1 du chantier pour charger des matériaux. On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi de Poisson de paramètre 5.

1° Calculer la probabilité de l'événement
A : « pendant une heure prise au hasard il n'entre aucun camion-benne sur la zone 1 du chantier. »

2° Calculer la probabilité de l'événement
B : « pendant une heure prise au hasard il entre au plus quatre camions-benne sur la zone 1 du chantier. »

C. Loi binomiale

On note E l'événement : « un camion-benne pris au hasard dans la flotte n'a pas de panne ou de sinistre pendant le premier mois du chantier. »
On suppose que la probabilité de l'événement E est 0,9.
On prélève au hasard 10 camions-benne dans la flotte pour les affecter à une zone du chantier. Le nombre de camions-benne de la flotte est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 camions-benne.
On désigne par Z la variable aléatoire qui à tout prélèvement de ce type associe le nombre de camions-benne n'ayant pas eu de panne ou de sinistre pendant le premier mois du chantier.

1° Justifier que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2° Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucun des 10 camions-benne n'ait de panne ni de sinistre pendant le premier mois du chantier.

D. Test d'hypothèse

De grandes quantités d'un certain type de fers cylindriques pour le béton armé, de diamètre 25 millimètres, doivent être réceptionnées sur le chantier.
On se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler, au moment de la réception d'une livraison, la moyenne μ de l'ensemble des diamètres en millimètres des fers à béton.
On note M la variable aléatoire qui, à chaque fer prélevé au hasard dans la livraison, associe son diamètre en millimètres. La variable aléatoire M suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type 0,2.
On désigne par $\overline{M}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 fers prélevés dans la livraison, associe la moyenne des diamètres des fers de cet échantillon. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.
L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 25$. Dans ce cas, la livraison est dite conforme pour le diamètre.
L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 25$.
Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

1° Sous l'hypothèse H_0, on admet que la variable aléatoire $\overline{M}$ suit la loi normale de moyenne 25 et d'écart type 0,02.
On admet également que : $P(24{,}961 \leq \overline{M} \leq 25{,}039) = 0{,}95$. **Ce résultat**, où 0,95 est une valeur approchée, **n'a pas à être démontré**.
Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

2° On prélève un échantillon aléatoire de 100 fers à béton et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres est $\bar{x} = 24{,}978$.
Peut-on, au seuil de 5 %, conclure que la livraison est conforme pour le diamètre ?

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS : groupement B

AMENAGEMENT FINITION

ASSISTANCE TECHNIQUE D'INGENIEUR

BATIMENT

CONCEPTION ET INDUSTRIALISATION EN MICROTECHNIQUES

CONCEPTION ET REALISATION DE CARROSSERIES

CONSTRUCTION NAVALE

CONSTRUCTIONS METALLIQUES

DOMOTIQUE

ENVELOPPE DU BATIMENT : FACADES-ETANCHEITE

ETUDES ET ECONOMIE DE LA CONSTRUCTION

FLUIDES – ENERGIES – ENVIRONNEMENTS

GEOLOGIE APPLIQUEE

INDUSTRIALISATION DES PRODUITS MECANIQUES

MAINTENANCE APRES-VENTE AUTOMOBILE

MAINTENANCE ET APRES-VENTE DES ENGINS DE TRAVAUX PUBLICS ET DE MANUTENTION

MAINTENANCE ET EXPLOITATION DES MATERIELS AERONAUTIQUES

MAINTENANCE INDUSTRIELLE

MECANIQUE ET AUTOMATISMES INDUSTRIELS

MOTEURS A COMBUSTION INTERNE

TRAITEMENT DES MATERIAUX

TRAVAUX PUBLICS

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = \mathrm{e}^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \dfrac{p-q}{2} \cos \dfrac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t$

$\cos t = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$

$\sin t = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$

$\mathrm{e}^{at} = \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos(\beta t) + \mathrm{i}\sin(\beta t))$, où $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} \mathrm{e}^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\text{Arc}\sin t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\text{Arc}\tan t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$e^{at} \quad (a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1+\tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$\left(e^u\right)' = e^u u'$$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$ *:*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ …….. où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ ……… où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

3. *PROBABILITES*

a) Loi binomiale $P(X=k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}$ où $\mathrm{C}_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X)=np$; $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X=k)=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) Loi exponentielle

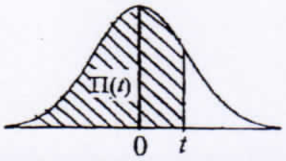
Fonction de fiabilité : $R(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}$ $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t)=P(T\le t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$

∽ Brevet de technicien supérieur ∾
Métropole–Antilles–Guyane–Polynésie
session 2009 - groupement B2 Microtechniques

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y'' - 2y' + y = 8\mathrm{e}^{x}.$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E_0): \quad y'' - 2y' + y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x^2\mathrm{e}^{x}$.
   Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(4x^2 - 4\right)\mathrm{e}^{x}$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

1. **a.** Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = 4\left(x^2 + 2x - 1\right)\mathrm{e}^{x}$.

   b. Donner sans justification la valeur exacte et la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de l'abscisse de chacun des points de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

2. **a.** Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = -4 - 4x + 2x^2 + x^2\epsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

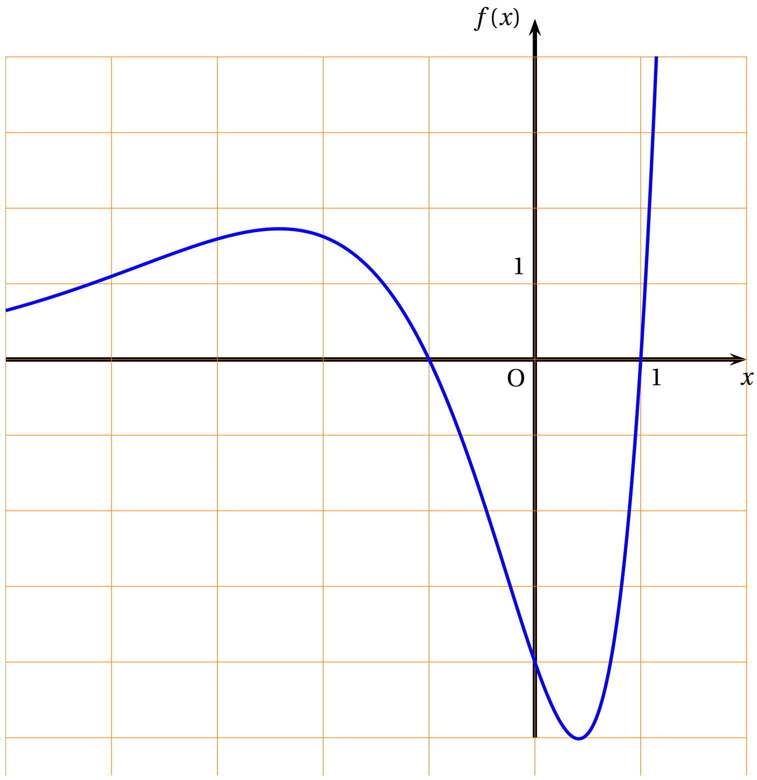
   b. Déduire du a. une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   c. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse 0.

C. Calcul intégral

Dans cette partie, les questions 1. et 2. peuvent être traitées de façon indépendante.

1. La fonction f définie au début de la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.
   Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -f''(x) + 2f'(x) + 8\mathrm{e}^{x}$.
   En déduire une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



2. **a.** Donner, sans justification, le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$

   b. Dans cette question, on admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(4x^2 - 8x + 4\right)\mathrm{e}^x$ est une primitive de la fonction f.
   Déduire de ce qui précède l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 2 **8 points**

On considère un signal correspondant à la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T = 2\pi$ et telle que :

$$f(t) = \pi - t \ pour 0 \leqslant t < \pi \text{ et } f(t) = 0 \text{ pour } \pi \leqslant t < 2\pi.$$

Soit $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ le développement en série de Fourier associé à la fonction f

1. Tracer, dans un repère orthogonal, une représentation graphique de la fonction f, pour t appartenant à l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 6\pi[$.
2. Montrer que $a_0 = \dfrac{\pi}{4}$.
3. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les intégrales suivantes, pour n entier non nul :

$$\int_0^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1-(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} (\pi - t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n}.$$

   Ces résultats sont admis et n'ont donc pas à être démontrés.
   En déduire les expressions de a_n et de b_n en fonction de l'entier non nul n.

4. *Calcul d'une valeur approchée de la valeur efficace de f*

Pour tout entier n, on pose $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ pour $n \geqslant 1$ et $c_0 = |a_0|$, où a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de la fonction f.

Le tableau suivant donne les valeurs de c_n, arrondies à 10^{-4}, pour n variant de 0 à 5.

n	0	1	2	3	4	5
c_n	0,785 4	1,185 4	0,5	0,340 8	0,25	0,201 6

On note E_f la valeur efficace de la fonction f.

La formule de Parseval permet d'écrire :

$$\left(E_f\right)^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = c_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2.$$

On obtient une valeur approchée de E_f en ne prenant pas en compte les harmoniques d'ordre supérieur ou égal à 6. On obtient alors une valeur approchée P du carré de la valeur efficace de f par la formule : $P = c_0^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{n=5} c_n^2$.

Donner, en utilisant le tableau ci-dessus, une approximation décimale à 10^{-4} près de P.

5. *Comparaison avec la valeur exacte de la valeur efficace de f*

a. On rappelle que $\left(E_f\right)^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $\left(E_f\right)^2 = \dfrac{\pi^2}{6}$.

b. Déduire des questions précédentes une valeur approchée arrondie à 10^{-3} du rapport $\dfrac{P}{\left(E_f\right)^2}$.

On peut observer ici que $\dfrac{P}{\left(E_f\right)^2}$ est inférieur à 0,95. On constate ainsi que l'abandon des harmoniques d'ordre supérieur à 5 ne fournit pas une excellente approximation de $\left(E_f\right)^2$ dans le cas où, comme ici, les valeurs de c_n ne décroissent pas rapidement.

Formulaire pour les séries de Fourier

f : fonction périodique de période T.

Développement en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t},\ (n \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{Z}).$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t \quad ; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}\,\mathrm{d}t\ (k \in \mathbb{Z})\ ;\ c_0 = a_0.$$

$$\frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2} = c_n\ ;\ \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2} = c_{-n}\ (n \in \mathbb{N}^*).$$