BTS Groupement A
Session 2004

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématique est autorisé.

Exercice 1(8 points) pour les spécialités Électrotechnique, Génie optique et IRIST

Les questions 1, 2 *et* 3 *peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*
Une entreprise fabrique des pièces. Ces pièces sont considérées comme conformes si leur longueur est comprise entre $79,8$ mm et $80,2$ mm.

1. On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce fabriquée, associe sa longueur en mm.
   On admet que la variable L suit une loi normale de moyenne 80 et d'écart type $0,0948$.
   On prélève une pièce au hasard dans la production.
   Déterminer, en utilisant la table de la loi normale centrée réduite, la probabilité que cette pièce soit conforme.
2. On admet que si on prélève, au hasard, une pièce dans la production, la probabilité que cette pièce ne soit pas conforme, est $p = 0,035$.
   (a) On note X, la variable aléatoire représentant le nombre de pièces défectueuses dans un lot de 100 pièces. Les pièces sont prélevées au hasard et le tirage est assimilé à un tirage avec remise.
   Justifier que X suit une loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = 0,035$.
   (b) Le tableau ci-dessous, donne la probabilité des événements "$X = k$" pour k variant de 0 à 9, à l'exception de l'événement "$X = 2$".

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(X = k)$	$0,0284$	$0,1029$		$0,2188$	$0,1924$	$0,1340$	$0,0770$	$0,0375$	$0,0158$	$0,0059$

   On considère les événements :
   A : "le nombre de pièces défectueuses du lot est égal à 2" ;
   B : "le nombre de pièces défectueuses du lot est au moins égal à 2".
   Calculer $P(A)$ au dix millième près, puis $P(B)$ au millième près.
   (c) Un lot de 100 pièces est envoyé à un client, le lot est accepté s'il contient au plus 4 pièces défectueuses.
   En utilisant le tableau ci-dessus, déterminer au millième près, la probabilité que le client refuse ce lot.
   (d) En utilisant le tableau ci-dessus, déterminer la plus petite valeur entière n telle que :
   $$P(X > n) < 0,03$$
3. L'entreprise souhaite améliorer la qualité de la production. Pour cela on projette de changer le processus de fabrication des pièces.
   On définit alors une nouvelle variable L_1 qui à chaque pièce à construire selon le nouveau processus associera sa longueur en mm.
   La variable aléatoire L_1 suit une loi normale de moyenne $m = 80$ et d'écart type σ'.
   Déterminer σ' pour que, en prenant une pièce au hasard dans la future production, la probabilité d'obtenir une pièce conforme soit égale à $0,99$.

Exercice 1 (8 points) pour les spécialités Contrôle industriel et régulation automatique, Électronique, Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire

Dans tout cet exercice, le nombre n est un entier relatif.
La suite $n \mapsto e(n)$ représente l'échelon discrétisé causal défini par :

$$\begin{cases} e(n) = 0 \text{ pour } n < 0 \\ e(n) = 1 \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$$

On considère un filtre numérique dans lequel le signal d'entrée est $n \mapsto e(n)$ et le signal de sortie est un signal discret causal noté $n \mapsto x(n)$.
Ce filtre est régi par l'équation récurrente :

$$x(n) - 2x(n-1) = e(n) \quad (E)$$

Partie 1

Dans cette partie, on résout l'équation récurrente (E) sans utilisation de la transformation en Z.

1. (a) Justifier que $x(0) = 1$.
   (b) Calculer $x(1)$, $x(2)$ et $x(3)$.
2. Pour tout entier naturel n l'équation (E) s'écrit :

$$x(n) - 2x(n-1) = 1 \quad (E)$$

   (a) On considère la suite y définie pour tout entier naturel n par :

$$y(n) = x(n) + 1$$

   Montrer que la suite y est une suite géométrique de raison 2.
   Donner l'expression de $y(n)$ en fonction de de l'entier naturel n.

   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de $x(n)$. Vérifier que l'on retrouve les mêmes valeurs de $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$ et $x(3)$ qu'à l'équation 1.

Partie 2

Dans cette partie on résout l'équation récurrente (E) en utilisant la transformation en Z.

1. On rappelle que $x(0) = 1$.
   On se place dans le cas où $n \geq 1$ et on admet que le signal $n \mapsto x(n)$, solution de l'équation récurrente (E), a une transformation en Z notée $(Zx)(z)$.

   (a) Montrer que pour tout z différent de 0, de 1 et de 2 on a :

$$(Zx)(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}$$

   (b) Montrer que pour tout z différent de 0, de 1 et de 2 on a :

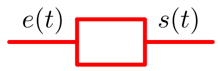
$$\frac{(Zx)(z)}{z} = \frac{-1}{z-1} + \frac{2}{z-2}$$

(c) En déduire par lecture inverse du dictionnaire d'images, le signal de sortie $n \mapsto x(n)$ pour $n \geq 1$.

2. Représenter dans un repère orthogonal, pour les nombres entiers n tels que $-2 \leq n \leq 3$, le signal de sortie $n \mapsto x(n)$. Prendre comme unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.

Exercice 2 (12 points) pour toutes les spécialités

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.



Dans le système représenté ci-dessus, e et s sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie, causaux (nuls pour t négatif).
On suppose que le système est régi par l'équation différentielle :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}(t) + RC\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) + s(t) = e(t) \qquad (1)$$

L, R et C sont des constantes réelles strictement positives. De plus à l'instant initial :

$$s(0^+) = 0 \text{ et } \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$$

Partie A

On suppose que les fonctions e et s admettent des transformées de Laplace notées respectivement E et S.

1. La fonction de transfert H du système est définie par $S(p) = H(p) \times E(p)$.
   En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation (1), exprimer $H(p)$ en fonction de L, R et C.
2. On suppose que $e(t) = \mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2)$
   où $\mathcal{U}$ est la fonction échelon unité : $\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$
   (a) Tracer la courbe représentative de la fonction e dans un repère du plan.
   (b) Déterminer $E(p)$.
3. **Dans la suite de l'exercice, on considère que** $L = 2$, $R = 1000$ et $C = 2.10^{-6}$.
   (a) Vérifier que $H(p) = \dfrac{500^2}{(p+250)^2 + \left(250\sqrt{3}\right)^2}$.
   (b) On admet que :
   $$\frac{1}{p}H(p) = \frac{1}{p} - \frac{p+250}{(p+250)^2 + \left(250\sqrt{3}\right)^2} - \frac{250}{(p+250)^2 + \left(250\sqrt{3}\right)^2}$$
   Déterminer l'original h_1 de la fonction $p \mapsto \dfrac{1}{p}H(p)$.
   Exprimer $s(t)$ à l'aide de $h_1(t)$.
   (c) Donner l'expression de $s(t)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$, $[1, 2[$ et $[2, +\infty[$.

Partie B

On rappelle que $H(p) = \dfrac{500^2}{(p+250)^2 + \left(250\sqrt{3}\right)^2}$.

1. On considère la fonction r définie pour tout réel $\omega > 0$ par :

$$r(\omega) = \mid H(\mathrm{j}\omega) \mid$$

   où j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

   Montrer que $r(\omega) = \dfrac{500^2}{\sqrt{\omega^4 - 500^2\omega^2 + 500^4}}$.

2. On considère la fonction f définie pour tout réel $\omega > 0$ par :

$$f(\omega) = \omega^4 - 500^2\omega^2 + 500^4$$

   Montrer que $f'(\omega) = 4\omega\left(\omega - 250\sqrt{2}\right)\left(\omega + 250\sqrt{2}\right)$.

3. Montrer que $r'(\omega)$ est du signe de $-f'(\omega)$.
4. En déduire que $r(\omega)$ est maximal pour une valeur de ω_0 de ω. Donner la valeur de ω_0 et calculer $r(\omega_0)$.

La partie B permet de déterminer le maximum du gain pour le système étudié en régime harmonique.