

SESSION 2005

**BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
AGENCEMENT DE L'ENVIRONNEMENT ARCHITECTURAL**

MATHÉMATIQUES

SUJET

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.
Le sujet est composé de 3 pages numérotées de 2/8 à 4/8.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 4 pages, numérotées 5/8 à 8/8.

*La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.*

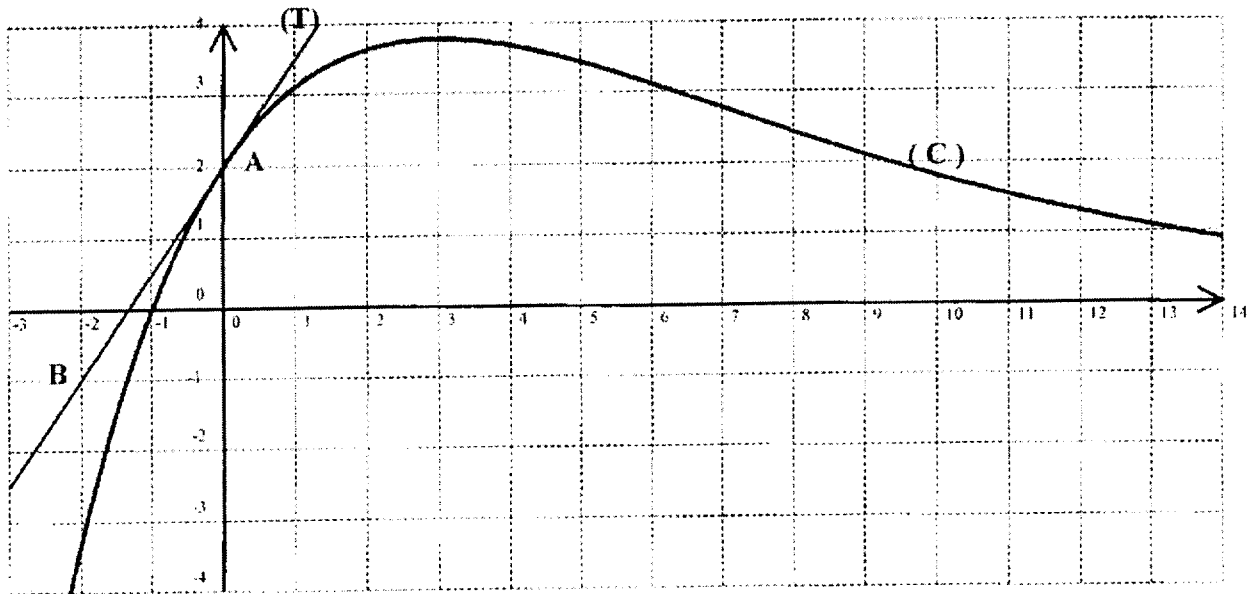
CODE ÉPREUVE : ADMAT		EXAMEN : BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR	SPECIALITÉ: AGENCEMENT DE L'ENVIRONNEMENT ARCHITECTURAL
SESSION 2005	SUJET	ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES	Calculatrice autorisée : oui
Durée : 2h		Coefficient : 2	N° sujet : 04NB05 Page : 1 / 8

EXERCICE 1 (10 POINTS)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1 cm). On considère la courbe (C) (représentée ci-dessous) d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3, +\infty[$ par

$$f(x) = (ax + b) e^{-0,25x}$$

Les nombres réels a et b sont à déterminer.



PARTIE A : détermination, puis étude de la fonction f

- 1) a) Déterminer une équation de la droite (T) passant par les points A de coordonnées $(0, 2)$ et B de coordonnées $(-2, -1)$.
- b) Calculer la dérivée f' de la fonction f en fonction des réels a et b .
- c) Déterminer les réels a et b sachant que la courbe (C) passe par le point A et admet en ce point la droite (T) pour tangente.

2) Dans la suite du problème, on considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-3, +\infty[$ par

$$f(x) = (2x + 2) e^{-0,25x}$$

Calculer la dérivée de la fonction f , étudier son signe, puis dresser le tableau de variation de la fonction f .

PARTIE B: calcul du volume d'un solide de révolution puis fabrication.

- 1) On considère le domaine D du plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 13$. On rappelle que le volume V du solide de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des abscisses est en unités de volume :

$$V = \pi \int_0^{13} [f(x)]^2 dx$$

- a) Vérifier que la fonction g définie sur l'intervalle $[-3, +\infty[$ par $g(x) = [f(x)]^2$ est telle que

$$g(x) = 4(x^2 + 2x + 1)e^{-0,5x}$$

- b) Démontrer que la fonction G définie sur l'intervalle $[-3, +\infty[$ par

$$G(x) = 4(-2x^2 - 12x - 26)e^{-0,5x} \text{ est une primitive de la fonction } g.$$

- c) Calculer la valeur exacte du volume V en unités de volume, puis donner une valeur arrondie à 10^{-3} près.

- 2) Une entreprise réalise un pied de lampe de salon, de la forme du solide étudié précédemment, par tournage sur une ébauche en bois plein composée d'éléments collés.

Ce pied de lampe est à l'échelle 3 par rapport au solide étudié dans la partie B) 1).

Quelle est la valeur maximale en dm arrondie à 10^{-2} près du diamètre de cet objet ?

Quel est le volume en dm^3 arrondi à 10^{-3} près d'un pied de lampe ?

EXERCICE 2 (10 POINTS)

PARTIE A

On prélève au hasard dans la production des pieds de lampe, un échantillon de taille 80, on mesure la masse de chacun. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant.

Masse en kg	[5,1;5,3 [	[5,3;5,5 [	[5,5;5,7 [	[5,7;5,9 [	[5,9;6,1 [	[6,1;6,3 [	[6,3;6,5 [
Effectifs	1	6	16	33	18	4	2

- 1) a) Construire l'histogramme de cette série.
b) En remplaçant chaque classe par sa valeur centrale, calculer la moyenne puis l'écart type de cette série statistique arrondis à 10^{-2} près (le détail des calculs n'est pas demandé).
- 2) On note X la variable aléatoire qui, à un pied de lampe pris au hasard dans la production, associe sa masse en kg. On suppose que X suit une loi normale de moyenne 5,8 et d'écart type 0,22.
(Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-2} près).
 - a) Calculer la probabilité qu'un pied de lampe choisi au hasard ait sa masse comprise entre 5,5 kg et 6,2 kg.
 - b) On décide de rejeter les pieds de lampe dont la masse est supérieure à 6,1 kg, quelle est la probabilité pour qu'un pied de lampe pris au hasard soit rejeté ?

PARTIE B

Une chaîne de magasins commercialise ces lampes de salon. elle souhaite étudier l'évolution du nombre de lampes vendues en fonction du nombre de magasins dans lesquels la lampe est proposée. Le tableau suivant présente cette évolution.

Nombre de magasins x_i	15	40	70	90	100	150
Nombre de lampes vendues y_i	60	254	362	504	615	810

On décide d'ajuster cette série statistique à deux variables par la méthode des moindres carrés.

- 1) Déterminer à l'aide de la calculatrice le coefficient de corrélation de cette série.
Est-on dans des conditions satisfaisantes pour réaliser un ajustement affine ?
- 2) Déterminer à la calculatrice une équation de la droite de régression de y en x sous la forme $y = mx + p$, avec m et p arrondis à 10^{-2} près.
- 3) En déduire une estimation du nombre de lampes vendues, si la chaîne présente celles-ci dans 400 magasins.

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES **BTS AMÉNAGEMENT DE L'ENVIRONNEMENT ARCHITECTURAL**

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$$

$$\sin(2t) = 2\sin t \cos t$$

2. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0 ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0.$$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\sin t$	$\cos t$
e^t	e^t	$\cos t$	$-\sin t$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$

Opérations

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k u'$$

$$(uv)' = u'v + u v'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \text{ } u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^a)' = a u^{a-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$

d) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$x'' + \omega^2 x = 0$	$x(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$

3. PROBABILITES

a) Loi binomiale $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $E(X) = np$, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

$k \backslash \lambda$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5438
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

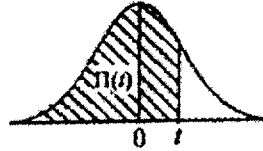
$k \backslash \lambda$	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,368	0,223	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,368	0,335	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,061	0,126	0,186	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,015	0,047	0,090	0,168	0,195	0,176	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,176	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,001	0,004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,000	0,001	0,003	0,012	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8		0,000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,146	0,132	0,113
9			0,000	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10				0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11				0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12					0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13					0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14						0,000	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15							0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16							0,000	0,001	0,005	0,011	0,022
17								0,001	0,002	0,006	0,013
18								0,000	0,001	0,003	0,007
19									0,000	0,001	0,004
20										0,001	0,002
21										0,000	0,001
22											0,000

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
Π(t)	0,99865	0,99884	0,99893	0,99902	0,99911	0,99919	0,99926	0,99932	0,99938	0,99945

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$