La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel, distribué par le centre d'examen, est autorisé.

EXERCICE 1 (10 POINTS)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm)

A- Déterminer les constantes réelles a et b pour que la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (ax + b)e^{x}$$

passe par le point A de coordonnées (0 , 4) et admette en ce point une tangente de coefficient directeur nul.

B- On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 , 1] par

$$f(x) = (4 - 4x)e^{x}$$

et on note (C) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier les variations de f.

2) Donner une valeur approchée arrondie à 10^{-2} près de $f(0,25)$, $f(0,5)$, et $f(0,75)$.

3) Tracer la courbe (C).

4) On note H la fonction définie sur [0 , 1] par $H(x) = (2 - x)e^{x}$

a) Calculer la dérivée de H et en déduire une primitive de f sur [0 , 1]

b) Calculer, en cm^2, l'aire de la portion de plan limitée par la courbe et les deux axes.
(On donnera la réponse exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près).

5) En traçant les courbes symétriques de (C) par rapport aux deux axes de coordonnées et par rapport à l'origine, on obtient une courbe fermée qui sera prise comme contour du fond d'une boîte cylindrique de hauteur 10 cm. Calculer, en cm^3, au cm^3 près, le volume de la boîte.

EXERCICE 2 (10 POINTS)

Dans la production d'une entreprise on prélève 100 rouleaux de papier de tapisserie dont on mesure les longueurs. On obtient les résultats suivants :

Longueur en m	[9,93 ; 9,95[	[9,95 ; 9,97[	[9,97 ; 9,99[	[9,99 ; 10,01[	[10,01 ; 10,03[	[10,03 ; 10,05[	[10,05 ; 10,07[
Effectifs	5	11	23	25	19	13	4

A- 1) Construire l'histogramme de cette série.

2) En remplaçant chaque classe par son centre affecté de l'effectif correspondant, calculer la moyenne et l'écart-type de cette série à 10^{-3} près. (*Le détail des calculs n'est pas demandé*).

B- On note X la variable aléatoire qui, à un rouleau pris au hasard, associe sa longueur exprimée en mètres. On admet que X suit une loi normale de moyenne $m = 10$ et d'écart-type $\sigma = 0,03$.

1) Considérant que les rouleaux trop longs peuvent être recoupés, on décide qu'un rouleau est accepté si sa longueur est supérieure ou égale à 9,95 m.

Calculer la probabilité, à 10^{-2} près, qu'un rouleau pris au hasard dans la production :

a) soit accepté.

b) soit refusé.

2) Parmi les rouleaux acceptés, ceux dont la longueur est supérieure à 10,05 m sont recoupés avant expédition.

a) Calculer $P(9,95 \leq X \leq 10,05)$ (on donnera l'arrondi à 10^{-2} près).

b) Quelle est la probabilité qu'un rouleau pris au hasard dans la production soit accepté et expédié sans être recoupé ?

C- ***On admet dans cette partie que la probabilité qu'un rouleau pris au hasard dans la production soit refusé est 0,05.***

On prélève au hasard 5 rouleaux dans la production. (Ce prélèvement est assimilé à un tirage de 5 rouleaux successivement avec remise). On appelle Y la variable aléatoire qui associe à chacun de ces prélèvements le nombre de rouleaux refusés parmi les 5.

1) Quelle est la loi de probabilité de Y ? (*On précisera ses paramètres*).

2) Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité de chacun des événements suivants :

a) Parmi les 5 rouleaux, aucun n'est refusé.

b) Parmi les 5 rouleaux, au moins 1 est refusé.

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

BTS AGENCEMENT
DE L'ENVIRONNEMENT ARCHITECTURAL
ASSISTANT EN CRÉATION INDUSTRIELLE

Tournez la page S.V.P.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES :

$\ln(ab)=\ln a + \ln b$, où $a>0$ et $b>0$

$\exp(a+b)=\exp a \times \exp b$

$\cos(a+b)=\cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b)=\sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos 2t=2\cos^2 t-1=1-2\sin^2 t$

$\sin 2t=2\sin t \cos t$

2. DERIVEES ET PRIMITIVES :

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$
e^t	e^t
$t^\alpha (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$
$\sin t$	$\cos t$
$\cos t$	$-\sin t$
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t}=1+\tan^2 t$

3. STATISTIQUE DESCRIPTIVE :

a) Moyenne arithmétique :

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i \qquad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=k} n_i c_i$$

b) Variance et écart-type :

$$V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)-(\bar{x})^2 \qquad \sigma=\sqrt{V}$$

c) Ajustement affine par la méthode des moindres carrés :

Covariance:

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)-\bar{x}\,\bar{y}$$

$$y=ax+b \text{ , où } a=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \quad ; \quad x=a'y+b' \text{ , où } a'=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$$

d) Corrélation linéaire :

$$r=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

4. PROBABILITES :

a) Loi binomiale :

$$P(X = k) = C_n^k \, p^k \, q^{n-k} \quad \text{où} \quad C_n^k = \frac{n\,!}{k!\,(n-k)!}$$

$$E(X) = np \qquad \sigma(X) = \sqrt{n p q}$$

b) Loi de Poisson :

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda \qquad V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3032	0,3293
2	0,0163	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0071	0,0126	0,0198
4		0,0002	0,0007	0,0015	0,0030
5			0,0001	0,0001	0,0003

k \ λ	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,368	0,223	0,135	0,0498	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,368	0,335	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,061	0,126	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,015	0,047	0,090	0,168	0,195	0,176	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,176	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,001	0,004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,000	0,001	0,003	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8		0,000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9			0,000	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10				0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11				0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12					0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13					0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14						0,000	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15							0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16							0,000	0,001	0,005	0,011	0,022
17								0,000	0,002	0,006	0,013
18									0,001	0,003	0,007
19									0,000	0,001	0,004
20										0,000	0,002
21											0,001
22											0,000

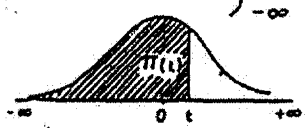
c) Loi normale :

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx.$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,985 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,928 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
Π(t)	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota. — La table donne les valeurs de Π(t) pour t positif. Lorsque t est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour t = 1,37 Π(t = 1,37) = 0,914 7
pour t = − 1,37 Π(t = − 1,37) = 0,085 3