EXERCICE 1 (11 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' - 4y = -5e^{-x}$
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y'' - 3y' - 4y = 0$.

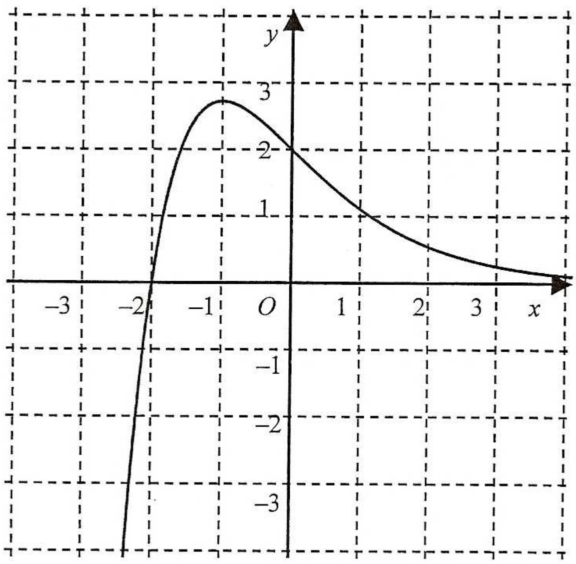
2° Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\,e^{-x}$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.

B. Étude locale d'une fonction

La courbe C ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)\,e^{-x}$.



1° Démontrer que le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction f est

$$f(x) = 2 - x + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0 .$$

2° Déduire du 1° une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

3° Étudier la position relative de C et T au voisinage du point d'abscisse 0.

C. Calcul intégral

On note $I = \int_0^{0,6} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1° À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I = 3 - 3,6\,\mathrm{e}^{-0,6}$.

2° Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de I.

3° Donner une interprétation graphique du nombre I.

EXERCICE 2 (9 points)

Une entreprise fabrique des chaudières de deux types :

– des chaudières dites « à cheminée »,
– des chaudières dites « à ventouse ».

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Ajustement affine

Le nombre de chaudières fabriquées lors des années précédentes est donné par le tableau suivant :

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre de chaudières fabriquées par milliers : y_i	15,35	15,81	16,44	16,75	17,19	17,30

1° À l'aide d'une calculatrice, déterminer :

a) le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double de variables x et y ; arrondir à 10^{-2} ;

b) déterminer une équation de la droite de régression de y en x, sous la forme $y = ax + b$, où a sera arrondi à 10^{-3} et b sera arrondi à l'unité.

2° En supposant que la tendance observée se poursuive pendant deux années, estimer le nombre de chaudières qui seront fabriquées l'année de rang 7.

B. Probabilités conditionnelles

L'entreprise a fabriqué en un mois 900 chaudières à cheminée et 600 chaudières à ventouse. Dans ce lot, 1% des chaudières à cheminée sont défectueuses et 5% des chaudières à ventouse sont défectueuses.
On prélève au hasard une chaudière dans la production de ce mois. Toutes les chaudières ont la même probabilité d'être prélevées.
On considère les événements suivants :

A : « La chaudière est à cheminée » ;
B : « La chaudière est à ventouse » ;
D : « La chaudière présente un défaut ».

1° Déterminer $P(A)$, $P(B)$, $P(D/A)$ et $P(D/B)$.

2° Calculer $P(D \cap A)$ et $P(D \cap B)$.

3° En remarquant que $D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$ et que les événements $D \cap A$ et $D \cap B$ sont incompatibles, calculer $P(D)$ et $P(\overline{D})$.

C. Loi normale

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque chaudière à cheminée prélevée au hasard dans la production, associe sa durée de fonctionnement en années.
On admet que X suit la loi normale de moyenne 15 et d'écart type 3.
Une chaudière est dite « amortie » si sa durée de fonctionnement est supérieure ou égale à 10 ans.

Calculer la probabilité qu'une chaudière prélevée au hasard dans la production soit « amortie » ; arrondir à 10^{-3}.

D. Intervalle de confiance

On considère un échantillon de 100 chaudières prélevées au hasard dans un stock important. Ce stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise. On constate que 94 chaudières sont sans aucun défaut.

1° Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue p des chaudières de ce stock qui sont sans aucun défaut.

2° Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 chaudières prélevées au hasard et avec remise dans ce stock, associe la fréquence des chaudières de cet échantillon qui sont sans aucun défaut.

On suppose que F suit la loi normale de moyenne p et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p\,(1-p)}{100}}$, où p est la fréquence inconnue des chaudières du stock qui sont sans aucun défaut.
Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence p avec le coefficient de confiance 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-2}.

3° On considère l'affirmation suivante : « la fréquence p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question 2° ».
Est-elle vraie ? (On ne demande pas de justification.)