BTS Productique bois
Session 1996

Exercice 1 *(10 points)*

Dans tout le problème, les résultats numériques demandés seront, s'il y a lieu arrondis au millième.

Une machine produit en série des pièces de bois. On note L la variable aléatoire prenant pour valeur, pour chaque pièce tirée au hasard dans la production, sa longueur mesurée en mm. On admet que L suit une loi normale d'écart-type 0,2 et dont la moyenne m peut être modifiée par un réglage de la machine. Un contrôle permet de rejeter une pièce si sa longueur est inférieure ou égale à 14,5.
La machine est réglée pour que $m = 15$.

1. Calculer la probabilité p qu'une pièce soit rejetée au contrôle.

   Pour la suite du problème, on prendra p = 0,006.

2. De la production de la machine, on extrait des lots de 100 pièces prélevées périodiquement, au hasard et avec remise, et on contrôle chacun de ces lots. On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot, associe le nombre de pièces rejetées.

   a) Déterminer la loi suivie par X (préciser ses paramètres).
   Calculer $p(X = 4)$.

   b) On admet que l'on peut approcher la loi de X par une loi de Poisson. Préciser le paramètre de cette loi.

   En utilisant l'approximation par cette loi de Poisson, donner une valeur approchée de la probabilité d'avoir au plus 3 pièces rejetées.

3. On veut ici tester le réglage de la machine à $m = 15$, à l'aide d'un échantillon de 25 pièces.
   On désigne par $\overline{L}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 25 pièces prélevées au hasard et avec remise, associe la moyenne des longueurs des 25 pièces.
   a) Quelle loi suit la variable $\overline{L}$? (Préciser ses paramètres)
   b) Déterminer le nombre réel positif h tel que $P(m - h < \overline{L} < m + h) = 0,95$.
   c) On veut construire un test d'hypothèse bilatéral permettant de décider si le réglage est correct au risque de 5%.
      - Quelle doit être l'hypothèse nulle H_0 ?
      - Quelle doit être l'hypothèse alternative H_1 ?
      - En utilisant la question 3.b, énoncer la règle de décision du test.
      - La moyenne observée sur un échantillon de 25 pièces est 15,06. Que conclut-on quant au réglage de la machine ?

Exercice 2 *(10 points)*

Partie A

On veut résoudre l'équation différentielle $y''(x)+2y'(x)+y(x)=e^{-x}$, notée (E), où y est une fonction de la variable réelle x, deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

1) Résoudre l'équation différentielle $y''(x)+2y'(x)+y(x)=0$.
2) Trouver le nombre réel m tel que la fonction y_0, définie par $y_0(x)=mx^2e^{-x}$, soit une solution de l'équation différentielle (E).
3) Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4) Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0)=1$ et $f'(0)=0$.

Partie B

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :

$$f(x)=e^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 10 cm).

1) Montrer que, pour tout nombre x appartenant à [0 ; 1], $f'(x)=-\dfrac{x^2}{2}e^{-x}$.

   Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de f.

2) *a)* Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
   b) Sur la figure, on constate que l'équation $f(x)=0{,}95$ admet une solution unique. Par lecture graphique, donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution (on fera apparaître sur la figure les tracés permettant cette lecture).
   c) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.