

~ Brevet de technicien supérieur 14 mai 2018 Groupement E ~

Le sujet contient deux annexes à rendre avec la copie

A. P. M. E. P.

Exercice 1

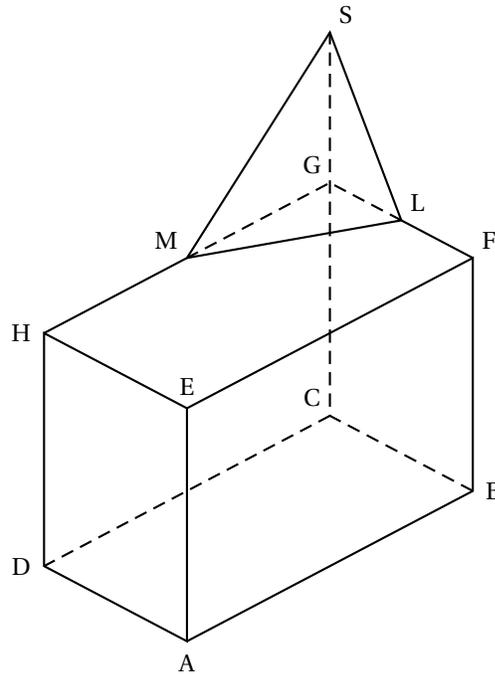
10 points

Un hôtelier souhaite installer une terrasse sur le toit de son hôtel et, pour protéger et orner l'accès à celle-ci, faire construire une pyramide de verre sur une partie du toit.

Une représentation du bâtiment en perspective parallèle est fournie ci-contre.

Cet hôtel est formé d'un pavé droit ABCDEFGH avec $AB = 14$ m, $AD = 7$ m et $AE = 10$ m.

On souhaite installer sur le toit une pyramide dont la base est le triangle GLM et la hauteur est GS, où les points L et M sont les milieux respectifs de [FG] et [GH] et $GS = \frac{1}{2} CG$



Partie A. Représentation du solide en perspective centrale

1. On a commencé, sur l'annexe 1, une représentation en perspective centrale de l'hôtel. L'image de chaque point de l'espace par cette perspective centrale est notée en minuscule. Par exemple, a est l'image du point A. La droite horizontale représente la ligne d'horizon. On note ω le point de fuite principal. Placer le point ω sur l'annexe 1.
2. Compléter sur l'annexe 1 la représentation de l'hôtel en perspective centrale. Les traits de construction doivent être apparents.

Partie B. Une contrainte angulaire

Afin que la pyramide satisfasse à certaines normes esthétiques, la mesure de l'angle \widehat{LSM} doit dépasser 60° .

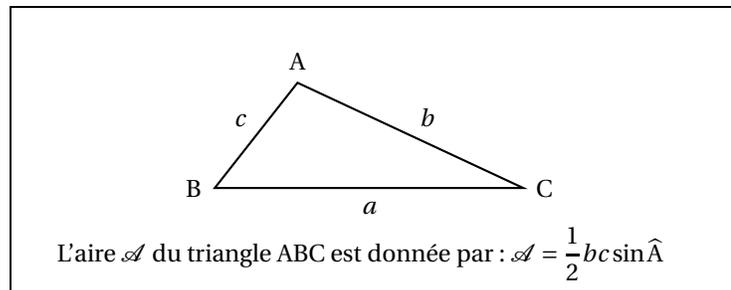
On considère les points I, J et K, respectivement situés sur [CD], [CS] et [CG] tels que $CI = CJ = CK = 1$ m. On munit ainsi l'espace d'un repère orthonormal $(C; \vec{CI}, \vec{CJ}, \vec{CK})$.

1. a. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points F, G et H dans ce repère.
b. On rappelle que L et M sont les milieux respectifs des segments [FG] et [GH].
Montrer que les coordonnées de L sont $(0; 3,5; 10)$.
Donner de même les coordonnées de M.

2. On admet que le point S a pour coordonnées (0; 0; 15).
- Calculer les coordonnées des vecteurs \vec{SL} et \vec{SM} .
 - Montrer que $\vec{SL} \cdot \vec{SM} = 25$.
 - Calculer les valeurs exactes des distances SL et SM.
 - En déduire la valeur approchée, arrondie au degré, de la mesure de l'angle \widehat{LSM} . La contrainte esthétique est-elle vérifiée?

Partie C. Étude d'aires et de volume

- Le constructeur de la pyramide en verre doit déterminer la surface de verre nécessaire à la réalisation de cet ouvrage.
 - Donner, sans justification, la nature des triangles GMS et GLS.
 - On rappelle la formule suivante :



Calculer l'aire des triangles LSM, GLS et GMS. Arrondir l'aire de LSM au dixième de m^2 .

- En arrondissant au m^2 supérieur, quelle est la surface de verre nécessaire à la réalisation de cette pyramide de verre?
2. Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie le numéro de la question et la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste apporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\frac{1}{3} \times B \times h$, où B est l'aire de la base et h la hauteur.

Le volume, arrondi au m^3 , de l'hôtel muni de la pyramide de verre est :

980 m^3	995 m^3	1 000 m^3	1 025 m^3
-----------	-----------	-------------	-------------

EXERCICE 2

10 points

Une enseigne de prêt-à-porter souhaite, à l'occasion des jeux olympiques de Paris en 2024, créer une gamme de vêtements identifiable grâce à un logo inspiré de la tour Eiffel.

L'objet de cet exercice est de modéliser ce logo en utilisant trois courbes de Bézier : C_1 , C_2 et C_3 .

Dans tout l'exercice, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Une représentation du plan est fournie en annexe 2 sur laquelle la courbe C_1 est déjà tracée.

Partie A. Étude de la courbe C_1

La courbe C_1 est la courbe de Bézier définie par les trois points de contrôle O, $P_1(2; 1)$ et $P_2(1; 5)$.

- En quels points de la courbe C_1 peut-on connaître sans calcul les tangentes?

2. Sur la figure donnée en annexe 2, placer les points P_1 et P_2 et tracer les tangentes à la courbe C_1 déterminées dans la question précédente.

Partie B. Étude et tracé de la courbe C_2

La courbe C_2 est la courbe de Bézier définie par les trois points de contrôle P_2, P_1 et $P_3(6; 0)$.

La courbe C_2 est l'ensemble des points $M_2(t)$ du plan tels que, pour tout t de l'intervalle $[0; 1]$, les coordonnées x_2 et y_2 de $M_2(t)$ sont données par :

$$x_2(t) = f_2(t) \quad \text{et} \quad y_2(t) = g_2(t),$$

où f_2 et g_2 sont deux fonctions dont les variations sont données par le tableau suivant. (Il est inutile de déterminer les expressions de $f_2(t)$ et $g_2(t)$.)

t	0	0,5	1
$f_2'(t)$	2	+	8
$f_2(t)$	1	2,75	6
$g_2'(t)$	-8	-	-2
$g_2(t)$	5	1,75	0

- Par simple lecture du tableau ci-dessus, recopier sur la copie et compléter les phrases suivantes.
 - « La tangente à la courbe C_2 au point de coordonnées $(\dots; \dots)$, obtenu pour $t = 0$, a pour vecteur directeur le vecteur \vec{u} de coordonnées \dots ».
 - « La tangente à la courbe C_2 au point de coordonnées $(\dots; \dots)$, obtenu pour $t = 1$, a pour vecteur directeur le vecteur \vec{v} de coordonnées \dots ».
- Les courbes C_1 et C_2 ont-elles la même tangente au point P_2 ? Justifier.
- Sur la figure donnée en annexe 2, faire apparaître les tangentes à la courbe C_2 aux points obtenus pour $t = 0$ et $t = 1$, placer le point A de C_2 obtenu pour $t = 0,5$, puis tracer la courbe C_2 .

Partie C. Étude et tracé de la courbe C_3

La courbe C_3 est la courbe de Bézier définie par les trois points de contrôle $P_4(1; 0), P_1$ et $P_5(5; 0)$.

On admet que cette courbe est l'ensemble des points $M_3(t)$ tels que, pour tout t de l'intervalle $[0; 1]$:

$$\overrightarrow{OM_3}(t) = (1-t)^2 \overrightarrow{OP_4} + 2t(1-t) \overrightarrow{OP_1} + t^2 \overrightarrow{OP_5}.$$

- Démontrer que les coordonnées x_3 et y_3 des points $M_3(t)$ de la courbe C_3 ont pour expression :

$$x_3 = f_3(t) = 2t^2 + 2t + 1 \quad \text{et} \quad y_3 = g_3(t) = -2t^2 + 2t.$$

2. Étudier les variations des fonctions f_3 et g_3 définies pour t dans l'intervalle $[0; 1]$ par :

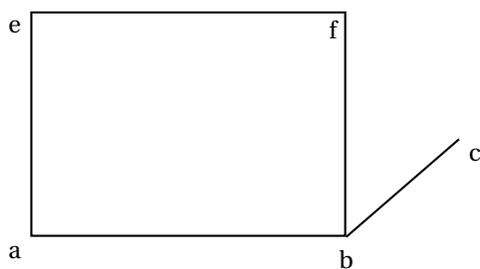
$$f_3(t) = 2t^2 + 2t + 1 \quad \text{et} \quad g_3(t) = -2t^2 + 2t.$$

Rassembler les résultats dans un tableau unique.

3. Sur la figure donnée en annexe 2, placer le point B de C_3 obtenu pour $t = 0,5$, faire apparaître les tangentes à la courbe C_3 aux points obtenus pour $t = 0$, $t = 0,5$ et $t = 1$, puis tracer la courbe C_3 .

ANNEXE 1 À RENDRE AVEC LA COPIE

Ligne d'horizon



ANNEXE 2 À RENDRE AVEC LA COPIE

