

BTS Bâtiment 1994

Exercice 1 Dans cet exercice chaque probabilité demandée sera calculée à 10^{-3} près.

Une enquête réalisée par la Sofres en 1991 permet d'estimer que la probabilité qu'une lettre, choisie au hasard dans le courrier d'une entreprise, parvienne à son destinataire en France, le lendemain, est 0,7.

Dans la suite on ne considère que les lettres à destination de la France.

A l'agence de Marne-la-Vallée d'une grande entreprise de bâtiment on admet que l'on expédie 100 lettres par jour. On note X la variable aléatoire qui, à un jour choisi au hasard, associe le nombre de lettres qui parviendront à leur destinataire le lendemain. On suppose que les acheminements de ces lettres se font en toute indépendance.

1.
 - (a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
 - (b) Calculer l'espérance mathématique de X puis la valeur, arrondie à l'entier le plus proche, de l'écart type de X .
 - (c) Calculer la probabilité que 60 lettres exactement, sur les 100 expédiées un jour choisi au hasard, parviennent à leur destinataire le lendemain.
Pour ce calcul, on prendra $C_{100}^{60} = 1,375.10^{28}$
2. On décide d'approcher la loi de la variable discrète X par la loi normale de paramètres $m = 70$ et $s = 5$. On note Y une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(70; 5)$. En utilisant cette approximation calculer :
 - (a) la probabilité qu'au moins 80 des 100 lettres, expédiées un jour choisi au hasard parviennent à leur destinataire le lendemain, c'est à dire

$$P(Y \geq 79, 5).$$

- (b) la probabilité que le nombre de lettres, sur les 100 expédiées un jour choisi au hasard, parvenant à leur destinataire le lendemain, soit strictement compris entre 55 et 85, c'est à dire

$$P(55, 5 \leq Y \leq 84, 5)$$

Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny

Exercice 2 A - Résolution d'une équation différentielle.

Soit (E) l'équation différentielle $(x+1)y' + (x-1)y = -x+1$ où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x , définie et dérivable sur $] -1; +\infty[$, et où y' est la fonction dérivée de y .

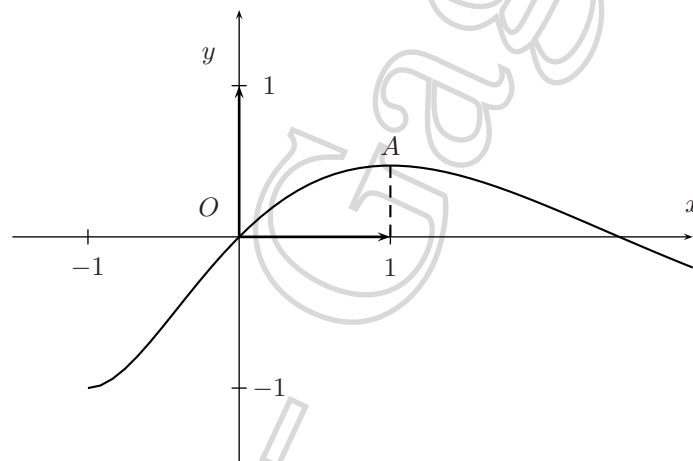
- (a) Soit g la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$
Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel de $] -1; +\infty[$: $g(x) = a + \frac{b}{x+1}$
En déduire la primitive G de g sur $] -1; +\infty[$ telle que $G(0) = 0$
(b) Résoudre sur $] -1; +\infty[$ l'équation différentielle $(E_1) : (x+1)y' + (x-1)y = 0$.
- Déterminer le nombre réel m pour que la fonction constante h définie sur $] -1; +\infty[$ par $h(x) = m$ soit solution de l'équation (E) .
- Déduire du 1° b) et du 2° l'ensemble des solutions de l'équation (E) .
- Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

B - Etude de quelques propriétés de la courbe représentative d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = e^{-x}(x+1)^2 - 1$.

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; l'unité graphique est 2 cm.

A l'aide d'une calculatrice graphique on a obtenu le dessin reproduit ci-dessous.



- Déterminer la fonction dérivée f' de f .
Soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1. Donner la valeur exacte de l'ordonnée de A . Préciser la tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$.
- La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une asymptote en $+\infty$? Justifier la réponse.
- (a) A l'aide du développement limité, au voisinage de 0, de la fonction : $t \mapsto e^t$, écrire le développement limité d'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f .
(b) Déduire du (a) une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 et la position relative de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{T}$ au voisinage de ce point.