# ~ Brevet de technicien supérieur ~ session 10 mai 2011 - groupement B2

**EXERCICE 1** **12 points**

***Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.***

*A. Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle $(E)$ : $y'' - 3y' + 2y = -2\mathrm{e}^{x} + 6$ où $y$ est une fonction inconnue de la variable réelle $x$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $y'$ la fonction dérivée de $y$ et $y''$ sa fonction dérivée seconde.

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $r^2 - 3r + 2 = 0$.
   (b) En déduire les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E_0) : \; y'' - 3y' + 2y = 0.$$

2. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x\mathrm{e}^{x} + 3$.
   (a) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*
   *Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
   *La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*
   La fonction dérivée $g'$ de la fonction $g$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

| | | |
|---|---|---|
| $g'(x) = 2\mathrm{e}^{x}$ | $g'(x) = 2x\mathrm{e}^{x}$ | $g'(x) = (2x+2)\mathrm{e}^{x}$ |

   (b) Démontrer que la fonction $g$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E)$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$.
4. Déterminer la solution $f$ de l'équation différentielle $(E)$ qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.

*B. Étude d'une fonction et calcul intégral*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{x} + 3$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. (a) On admet le résultat suivant : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x e^{x} = 0$.
   Calculer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
   (b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote dont on donnera une équation.
2. (a) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $f$ est : $f(x) = 2 + x + \dfrac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.
   (b) En déduire une équation de la tangente $T$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (c) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*
   *Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
   *La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*
   On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $T$. Recopier sur votre copie la justification exacte.

| | | |
|---|---|---|
| $\dfrac{3}{2}x^2$ est positif au voisinage de 0. | $x^2\varepsilon(x)$ est positif au voisinage de 0. | $2 + x$ est positif au voisinage de 0. |

3. On admet que la fonction dérivée de $f$ est donnée, pour tout $x$ réel, par : $f'(x) = (2x+1)e^x$.
   (a) Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $f'(x)$ puis en déduire le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Donner la valeur approchée arrondie à 0,01 du minimum de la fonction $f$.
4. (a) On note $I = \displaystyle\int_0^{0,5}\left(2+x+\frac{3}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que $I = 1,1875$.
   (b) On note $K = \displaystyle\int_0^{0,5}(2x-1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.
   Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = 3 - 2\mathrm{e}^{0,5}$.
   (c) On note $J = \displaystyle\int_0^{0,5} f(x)\mathrm{d}x$.
   En utilisant la question précédente, déterminer la valeur exacte de $J$.
   (d) Vérifier que $J - I$ est inférieur à $2 \times 10^{-2}$.

**EXERCICE 2** 8 points

On considère un signal périodique correspondant à la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ et représentée sur le graphique fourni en annexe, pour tout réel $x$ de l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.

*Les questions* 1. *et* 2. *sont des questions à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
*La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponsse ne rapporte ni n'enlève de point.*

1. La fonction $f$ est :

| | | |
|---|---|---|
| paire de période $\pi$ | paire de période $2\pi$ | impaire de période $\pi$ |

2. Pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, $f(x) = \pi - x$.
   Si $x$ appartient à l'intervalle $[-\pi\ ;\ 0]$, $f(x)$ s'écrit :

| | | |
|---|---|---|
| $f(x) = -x$ | $f(x) = \pi + x$ | $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + x$ |

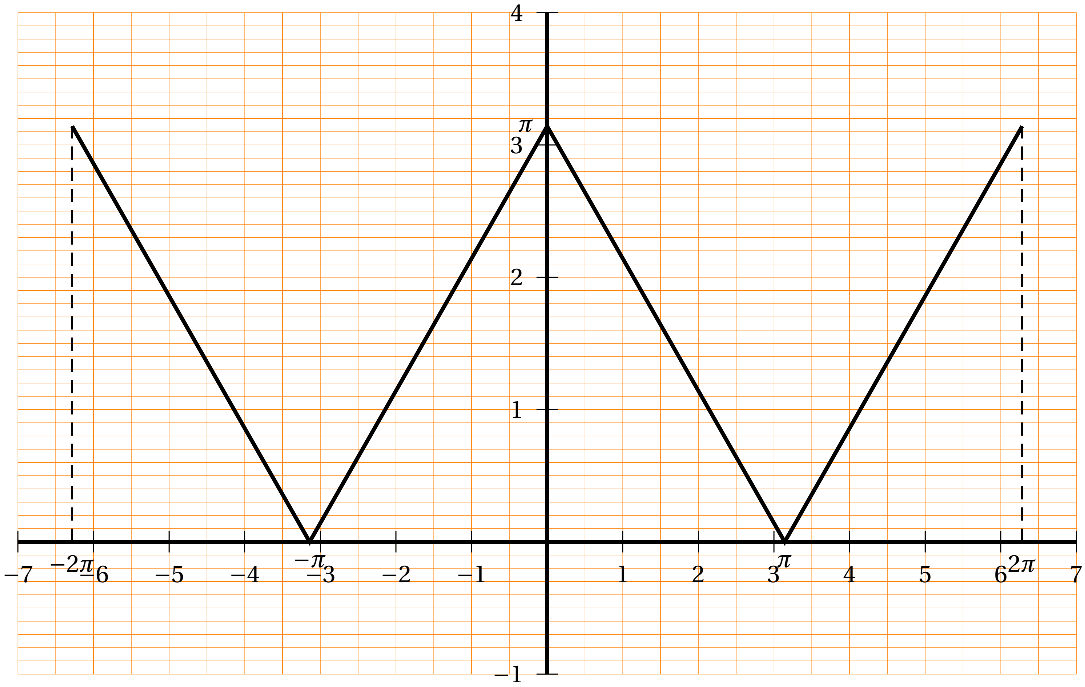
3. On note $a_0$, et, pour tout entier naturel non nul $n$, $a_n$ et $b_n$ les coefficients de Fourier de la fonction $f$.
   (a) Justifier que pour tout $n$ non nul, $b_n = 0$.
   (b) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi}(\pi - x)\,\mathrm{d}x$.
   (c) Montrer que $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
4. (a) Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant :
   $a_n = \dfrac{2}{\pi n^2}\left[1-(-1)^n\right]$ pour tout $n \geqslant 1$.
   **Le résultat précédent n'est pas à démontrer.**
   Déterminer les valeurs exactes de $a_1, a_2$ et $a_3$.
   (b) On note $s_3$ la fonction correspondant au développement en série de Fourier de la fonction $f$, dans lequel on ne conserve que les termes d'indice $n$ inférieur ou égal à 3.
   Écrire l'expression de $s_3(x)$.
5. On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\left(\cos x + \dfrac{1}{9}\cos(3x)\right)$.
   (a) Compléter, à l'aide de la calculatrice, le tableau figurant sur la feuille annexe, avec les valeurs approchées de $f(x)$ et $g(x)$ arrondies à $0,01$.
   (b) On admet que la fonction $g$ est décroissante sur $[0\ ;\ \pi]$. Tracer, dans le repère donné en annexe, l'allure de la courbe représentative de la fonction $g$ sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.
   (c) Compléter le graphique sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 0]$ sachant que la fonction $g$ est paire.

**ANNEXE À COMPLÉTER PUIS À RENDRE AVEC LA COPIE**

**EXERCICE 2**

Questions 1., 2. et 5.

Représentation graphique de $f$. Graphique à compléter aux questions 5. b. et 5. c.




Tableaux de valeurs à compléter à la question 5. a. :

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | $\frac{\pi}{2}$ | 2 | 2,5 | 3 | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | 2,14 | | | | | | |
| $g(x)$ | | | 2,12 | | | | | | |

# Brevet de technicien supérieur
# session 10 mai 2011 - groupement B

**EXERCICE 1** 12 points

***Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.***

*A. Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle $(E)$ : $y'' - 3y' + 2y = -2\mathrm{e}^{x} + 6$ où $y$ est une fonction inconnue de la variable réelle $x$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $y'$ la fonction dérivée de $y$ et $y''$ sa fonction dérivée seconde.

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $r^2 - 3r + 2 = 0$.

   (b) En déduire les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E_0) : \quad y'' - 3y' + 2y = 0.$$

2. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x\mathrm{e}^{x} + 3$.

   (a) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*
   *Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
   *La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*
   La fonction dérivée $g'$ de la fonction $g$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

| | | |
|---|---|---|
| $g'(x) = 2\mathrm{e}^{x}$ | $g'(x) = 2x\mathrm{e}^{x}$ | $g'(x) = (2x+2)\mathrm{e}^{x}$ |

   (b) Démontrer que la fonction $g$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E)$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$.
4. Déterminer la solution $f$ de l'équation différentielle $(E)$ qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.

*B. Étude d'une fonction et calcul intégral*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{x} + 3$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. (a) On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$.
   Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

   (b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote dont on donnera une équation.

2. (a) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $f$ est : $f(x) = 2 + x + \dfrac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

   (b) En déduire une équation de la tangente $T$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   (c) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*
   *Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
   *La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*
   On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $T$. Recopier sur votre copie la justification exacte.

| | | |
|---|---|---|
| $\dfrac{3}{2}x^2$ est positif au voisinage de 0. | $x^2\varepsilon(x)$ est positif au voisinage de 0. | $2 + x$ est positif au voisinage de 0. |

3. On admet que la fonction dérivée de $f$ est donnée, pour tout $x$ réel, par : $f'(x) = (2x+1)e^{x}$.

   (a) Étudier sur $\mathbb{R}$le signe de $f'(x)$ puis en déduire le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Donner la valeur approchée arrondie à 0,01 du minimum de la fonction $f$.

4. (a) On note $I = \displaystyle\int_0^{0,5} \left(2 + x + \frac{3}{2}x^2\right) \mathrm{d}x$.
Démontrer que $I = 1,1875$.

(b) On note $K = \displaystyle\int_0^{0,5} (2x-1)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.
Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = 3 - 2\mathrm{e}^{0,5}$.

(c) On note $J = \displaystyle\int_0^{0,5} f(x)\mathrm{d}x$.
En utilisant la question précédente, déterminer la valeur exacte de $J$.

(d) Vérifier que $J - I$ est inférieur à $2 \times 10^{-2}$.

**EXERCICE 2** 8 points

***Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.***

Une entreprise fabrique des barres de combustible pour des centrales électriques. Des pastilles de combustible sont introduites dans des gaines qui servent à réaliser ces barres.

**Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à $10^{-3}$.**

*A. Loi normale*

Une gaine est considérée comme conforme pour le diamètre lorsque le diamètre intérieur, exprimé en millimètres, appartient à l'intervalle [8,18 ; 8,48].
On note $X$ la variable aléatoire qui, à chaque gaine prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe son diamètre intérieur.
On admet que $X$ suit la loi normale de moyenne 8,33 et d'écart type 0,09.

1. Calculer la probabilité qu'une gaine ainsi prélevée soit conforme pour son diamètre intérieur.
2. Calculer le nombre réel $h$ positif tel que $P(8,33 - h \leqslant X \leqslant 8,33 + h) = 0,95$. Interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.

*B. Loi binomiale*

On considère un stock important de gaines. On note $E$ l'événement : « une gaine prélevée au hasard dans le stock n'est pas conforme pour le diamètre intérieur ».
On suppose que $P(E) = 0,096$.
On prélève au hasard 50 gaines dans le stock pour vérification du diamètre intérieur. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 gaines.
On considère la variable aléatoire $Y$ qui, à tout prélèvement de 50 gaines ainsi défini, associe le nombre de gaines non conformes pour le diamètre intérieur de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire $Y$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, cinq gaines ne soient pas conformes pour le diamètre intérieur.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux gaines ne soient pas conformes pour le diamètre intérieur.

*C. Test d'hypothèse*

On se propose de construire un test d'hypothèse pour contrôler la moyenne $\mu$ inconnue des diamètres, exprimés en millimètres, d'un lot important de pastilles de combustible destinées à remplir les gaines.
On note $D$ la variable aléatoire qui, à chaque pastille prélevée au hasard dans le lot, associe son diamètre.
On admet que la variable aléatoire $D$ suit la loi normale de moyenne inconnue $\mu$ et d'écart type 0,2.
On désigne par $\overline{D}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 300 pastilles prélevées dans le lot, associe la moyenne des diamètres de ces pastilles (le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).
L'hypothèse nulle est $H_0 :\ \mu = 8,13$. Dans ce cas la livraison est dite conforme pour le diamètre.
L'hypothèse alternative est $H_1 :\ \mu \neq 8,13$.
Le seuil de signification du test est fixé à 5 %.

1. Sous l'hypothèse nulle $H_0$, on admet que la variable aléatoire $\overline{D}$ suit la loi normale de moyenne 8,13 et d'écart type 0,012.

   On admet également que $P\left(8,106 \leqslant \overline{D} \leqslant 8,154\right) = 0,95$.

   **Ce résultat n'a pas à être démontré.**

   Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

2. On prélève un échantillon aléatoire de 300 pastilles dans la livraison reçue et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres des pastilles est $\overline{d} = 8,16$. Peut-on, au seuil de 5 %, conclure que la livraison est conforme pour le diamètre ?