Brevet de technicien supérieur Métropole septembre 2020 - Groupement B

Exercice 1 — 10 points

Un jouet pour enfant prévu pour être utilisé en extérieur, est un bonhomme de neige monté sur un ressort. Le principe de fonctionnement est le suivant : on comprime le jouet au sol et une fois relâché, celui-ci est propulsé dans les airs à une certaine hauteur et retombe ensuite au sol. On suppose que le mouvement du jouet est vertical.

On souhaite étudier la hauteur atteinte par le jouet en fonction du nombre d'années d'utilisation.

On modélise la hauteur que peut atteindre le jouet par une solution de l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 2y' + y = 3\,;$$

y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $[0\,;+\infty[$;
x représente la durée d'utilisation, exprimée en années;

y' désigne la fonction dérivée de y et y'' désigne la fonction dérivée seconde de y.

Partie A : Résolution de l'équation différentielle

On fournit les formules suivantes :

Équations	Solutions sur un intervalle I
Équation différentielle : $ay'' + by' + cy = 0$ Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ.	Si $\Delta > 0$, $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\,\mathrm{e}^{r_2 x}$ où r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation caractéristique. Si $\Delta = 0$, $f(x) = (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{rx}$ où r est la solution double de l'équation caractéristique. Si $\Delta < 0$, $f(x) = [\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)]\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ où $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ sont les solutions complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E_0) : $y'' + 2y' + y = 0$.
2. Soit un nombre réel k, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction constante g telle que $g(x) = k$.
   Déterminer la valeur de k pour que la fonction g soit une solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la fonction f, solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions suivantes : $f(0) = 4$ et $f(2) = 5\,\mathrm{e}^{-2} + 3$.

Partie B : Étude de la fonction f

La hauteur exprimée en décimètres que peut atteindre le jouet après x années d'utilisation est donnée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x} + 3.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm donnée en **Annexe**.

1. Quelle hauteur en décimètres peut atteindre le jouet lors de la toute première utilisation, c'est-à-dire pour $x = 0$?

2. Quelle hauteur en décimètres peut atteindre le jouet après 6 mois d'utilisation ?
Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2}.

3. On admet que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ et que $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} + 3$.

- **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- **b.** En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote $\mathscr{D}$, dont on donnera une équation puis tracer cette droite $\mathscr{D}$ sur le document fourni en **Annexe (à rendre avec la copie)**.
- **c.** Interpréter cette limite dans le contexte de la situation étudiée.

4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

- **a.** Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $f'(x) = (1-2x)\mathrm{e}^{-x}$.
- **b.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f.

5. On admet que la fonction F définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par : $F(x) = (-2x-3)\,\mathrm{e}^{-x} + 3x$ est une primitive de la fonction f.
Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.
Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2}.

Exercice 2 10 points

Les parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans le cadre du développement d'un de ses prototypes, une marque a demandé à ses équipementiers de développer des technologies et des composants l'aidant à créer un véhicule prototype consommant moins de 1 L au 100 km. Un équipementier a conçu des billes en céramique plus légères pour les roulements du prototype. Ces billes doivent avoir un diamètre de 12,7 mm.

Partie A : Loi normale

On note X la variable aléatoire qui, à chaque bille en céramique produite par l'équipementier, associe son diamètre exprimé en mm. On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $\mu = 12,7$ et d'écart-type σ.

1. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points.*
   On admet que : $P(12,6 \leqslant X \leqslant 12,8) \approx 0,95$.
   La valeur de l'écart-type σ est :

0,05	0,1	0,15	0,2

2. Donner la probabilité, arrondie au centième, qu'une bille prélevée au hasard dans la production de l'équipementier ait un diamètre strictement supérieur à 12,8 mm.

Partie B : Probabilités conditionnelles

L'équipementier propose ses billes en céramique plus légères à deux marques automobiles A et B.
On choisit au hasard une bille en céramique dans la production de l'équipementier.

On admet que :

- La probabilité que la bille soit achetée par la marque A est 0,3.
- La probabilité qu'elle soit achetée par la marque B est 0,7.
- Sachant qu'elle a été achetée par la marque A, la probabilité que la bille soit utilisée dans le roulement d'un nouveau prototype est 0,75.

On note :

- L'évènement A : « La bille en céramique est achetée par la marque A ».
- L'évènement B : « La bille en céramique est achetée par la marque B ».
- L'évènement R : « la bille en céramique vendue par l'équipementier est utilisée dans le roulement d'un nouveau prototype ».

E et F étant des évènements d'une expérience aléatoire, on désigne par $P(E)$ la probabilité que l'évènement E soit réalisé ; on suppose que $P(F) \neq 0$ et on note par $P_F(E)$ la probabilité que l'évènement E soit réalisé sachant F.

1. **a.** Donner la valeur de $P_A(R)$.
   b. Démontrer que : $P(A \cap R) = 0,225$.

2. On admet que la probabilité qu'une bille en céramique vendue par l'équipementier soit utilisée dans le roulement d'un nouveau prototype est : $P(R) = 0,9$.

a. Justifier que $P(B \cap R) = 0,675$.

b. En déduire la valeur arrondie au centième de $P_B(R)$.

3. Calculer la probabilité qu'une bille en céramique ait été achetée par la marque A sachant qu'elle est utilisée dans le roulement d'un nouveau prototype.

Partie C : Test d'hypothèse

L'équipementier veut vérifier que les billes en céramique ont un diamètre de 12,7 mm avant de les proposer à une marque et il commande un test d'hypothèse bilatéral au seuil de signification de 5 %.
On note Y la variable aléatoire qui, à chaque bille céramique produite par l'équipementier, associe son diamètre exprimé en mm. La variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 0,045$.
On prélève au hasard un échantillon de 200 billes en céramique dans la production de l'équipementier. Celle-ci est suffisamment grande pour assimiler ce prélèvement à un tirage successif avec remise de 200 billes.

On rappelle que la variable aléatoire $\overline{Y}$ qui, à tout échantillon prélevé au hasard de n billes en céramique dans la production de l'équipementier, associe la moyenne des diamètres des billes, suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

- L'hypothèse nulle du test est : $H_0 : \mu = 12,7$;
- l'hypothèse alternative est : $H_1 : \mu \neq 12,7$.

Les résultats sont arrondis au millième.

1. a. Sous l'hypothèse H_0, justifier que la variable aléatoire $\overline{Y}$ suit la loi normale de paramètres 12,7 et d'écart-type 0,003.

b. Calculer la valeur du réel h tel que, sous l'hypothèse H_0, on ait :
$P(12,7 - h \leqslant \overline{Y} \leqslant 12,7 + h) = 0,95$.

2. Énoncer la règle de décision du test.

3. Sur un échantillon de 200 billes en céramique prélevé au hasard dans la production de l'équipementier, on a relevé un diamètre moyen de 12,71 mm.
L'équipementier peut-il remettre en cause le diamètre annoncé des billes en céramique ?
Justifier la réponse.

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 1. Partie B. Question 3.b.