CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

Epreuve de mathématiques

Groupement A - (CIRA - Electronique - Génie optique).

Eléments de correction et proposition de barème.

Exercice 1 :

Partie 1

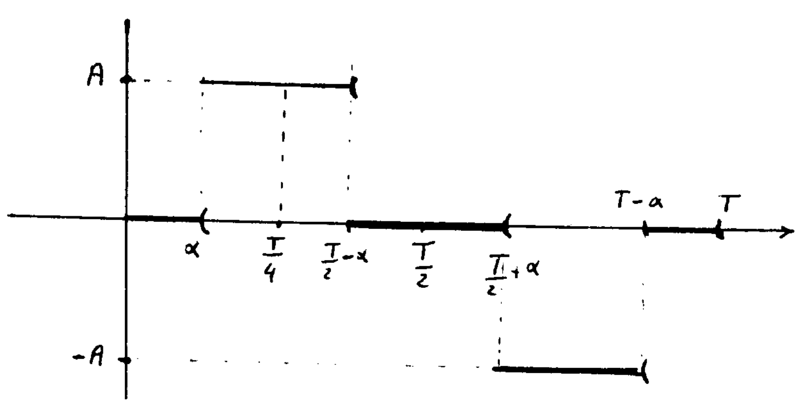
1- $$\cos(n\pi - n\omega\alpha) = \cos(n\pi)\cos(n\omega\alpha) + \sin(n\pi)\sin(n\omega\alpha)$$
$$= (-1)^n \cos(n\omega\alpha) + 0 \times \sin(n\omega\alpha)$$
$$= (-1)^n \cos(n\omega\alpha).$$

De même :

$$\cos(n\pi + n\omega\alpha) = \cos(n\pi)\cos(n\omega\alpha) - \sin(n\pi)\sin(n\omega\alpha)$$
$$= (-1)^n \cos(n\omega\alpha).$$

1 point

2-



1 point

3- Calcul des coefficients de Fourier b_n :

$n \in \mathbb{N}^*$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T g_\alpha(t)\sin(n\omega t)\,dt$$
$$b_n = \frac{2}{T} A\left[\int_\alpha^{T/2-\alpha} \sin(n\omega t)\,dt - \int_{\frac{T}{2}-\alpha}^{T-\alpha} \sin(n\omega t)\,dt\right]$$
$$b_n = \frac{2A}{T}\left[\left[\frac{-\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_\alpha^{T/2-\alpha} - \left[\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_{\frac{T}{2}+\alpha}^{T-\alpha}\right.$$

$$b_n = \frac{A}{n\pi}\left[-\cos(n\pi - n\omega\alpha) + \cos(n\omega\alpha) + \cos(n\pi - n\omega\alpha) - \cos(n\pi + n\omega\alpha)\right]$$ 2 points

$$b_n = \frac{2A}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)\cos(n\omega\alpha).$$

Si $n = 2p \quad (p \in \mathbb{N}^*) \quad , (-1)^n = 1$

$$b_n = b_{2p} = 0$$ 0,5 point

Si $n = 2p+1 \quad (p \in \mathbb{N}) \quad (-1)^n = -1$

$$b_{2p+1} = \frac{4A}{\pi} \cdot \frac{\cos[(2p+1)(\omega\alpha)]}{2p+1}$$

4) Si $t \in [0, \alpha[\cup]\alpha, \frac{T}{4}]$, la fonction g_α est continue :

$$S(t) = g_\alpha(t)$$

Pour $t = \alpha \qquad S(\alpha) = \dfrac{g_\alpha(\alpha^-) + g_\alpha(\alpha^+)}{2} = \dfrac{A}{2} \neq g_\alpha(\alpha)$ 1 point

La valeur α est un point de discontinuité de la fonction g_α.

Partie II

1/ Voir document réponse 1 0,5 point

2/ Voir document réponse 2 1 point

Pour tout $t \in [0, T[\qquad V_1(t) = (g_0 + g_{\frac{T}{6}})(t).$

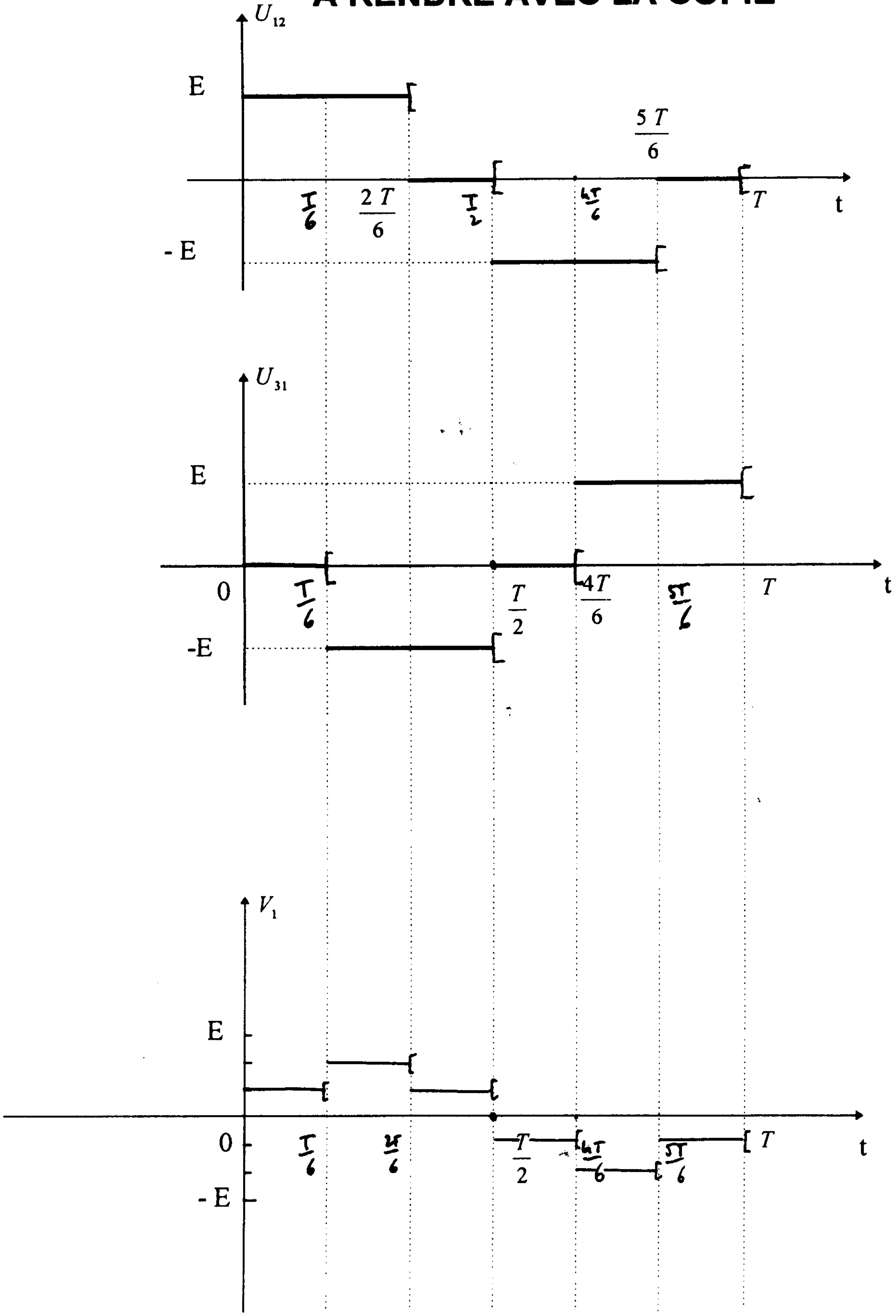
Comme V_1 et $g_0 + g_{\frac{T}{6}}$ sont périodiques de période T, on en déduit que V_1 et $g_0 + g_{\frac{T}{6}}$ sont égales sur $\mathbb{R}$. 0,5 point

3/ $T = 2\pi$ et $A = \frac{E}{3}$

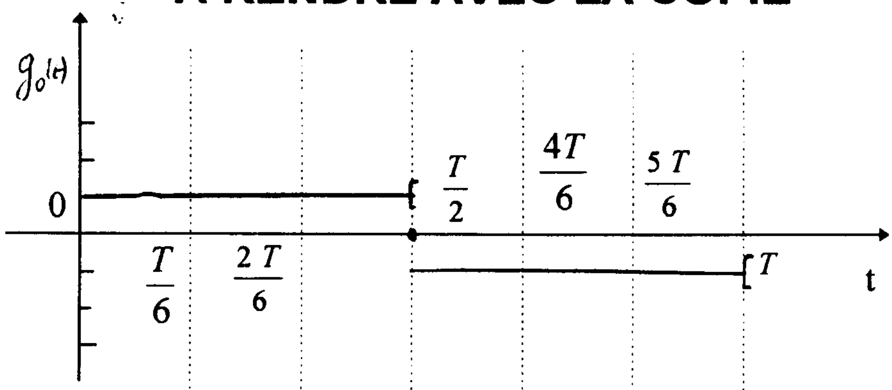
L'harmonique de rang 1 de la série de Fourier associée à la fonction V_1 est la somme des harmoniques de rang 1 associés aux fonctions g_0 : $\frac{4E}{3\pi}\sin t$ et $g_{\frac{\pi}{3}}$: $\frac{4E}{3\pi}\cos\frac{\pi}{3} \times \sin t$

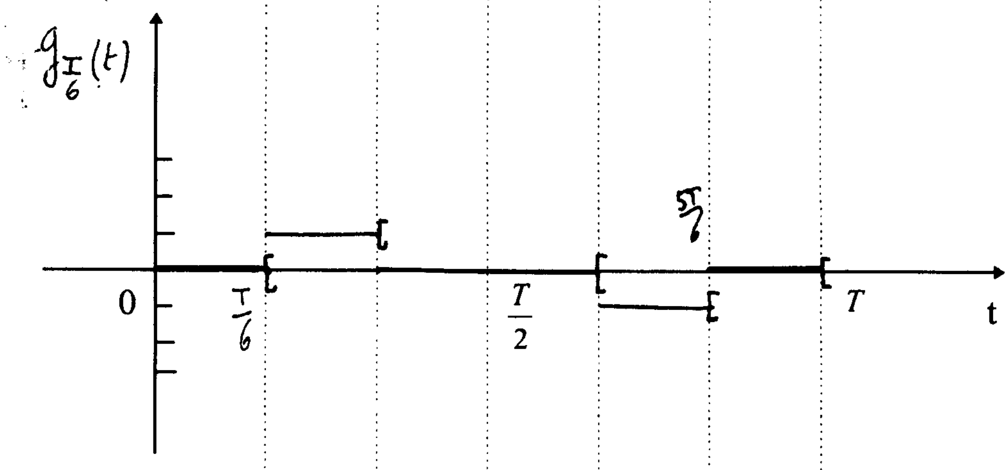
soit $\varphi(t) = \frac{4E}{3\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\sin t = \frac{2E}{\pi}\sin t$ 1 point.

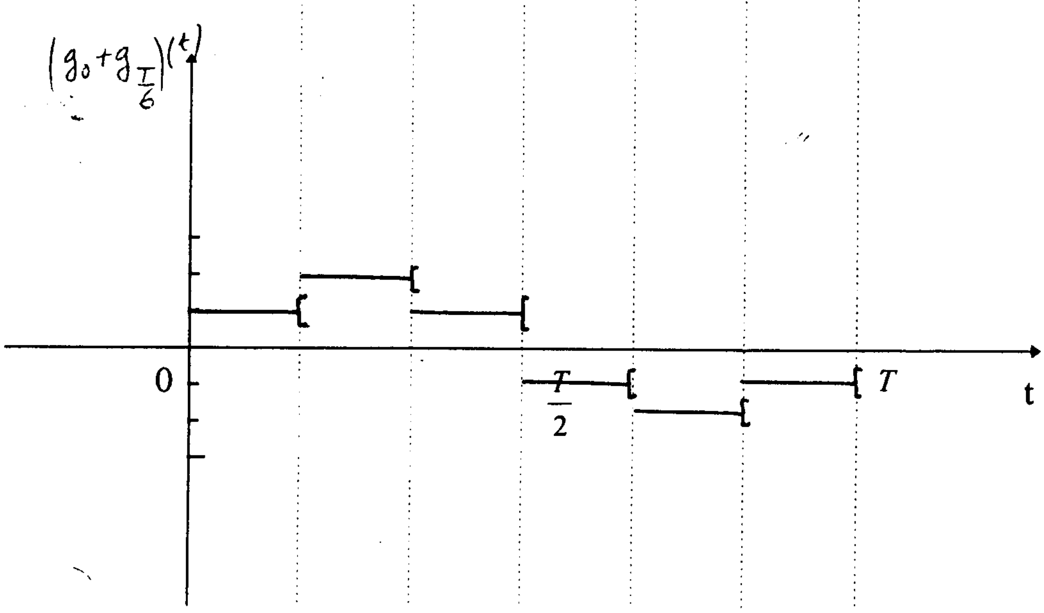
DOCUMENT REPONSE 1
A RENDRE AVEC LA COPIE



DOCUMENT REPONSE 2
A RENDRE AVEC LA COPIE







4/ $\varphi(t)$ est maximum lorsque $\sin t = 1$:

$$\Phi = \frac{2E}{\pi}$$

$$\frac{\Phi}{\sqrt{2}} = 220 \iff \frac{2E}{\pi} = 220\sqrt{2}$$

$$af = E = 110\sqrt{2}\ \pi$$

$f = 50$; $\quad a = \dfrac{110\sqrt{2}\ \pi}{50} = 2{,}2\sqrt{2}.\pi$ — 0,5 point

---

Exercice 2 : (BTS génie optique)

1/ $$X'(t) - X(t) = (2t+1)e^t \qquad (E_1)$$

1-a) soit $f(t) = (at^2 + bt)e^t$

$$f'(t) = \left[at^2 + (2a+b)t + b\right]e^t$$

f est solution de l'équation différentielle si et seulement si pour tout t

$$f'(t) - f(t) = (2t+1)e^t \iff (2a\ t + b)e^t = (2t+1)e^t$$

$(\forall t \in \mathbb{R})\ e^t > 0$ $\quad \iff 2at + b = 2t + 1$ — 0,75 point

$$f(t) = (t^2 + t)e^t \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

1-b) $X'(t) - X(t) = (2t+1)e^t$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre : ses solutions sont la somme des solutions de l'équation homogène associée et d'une solution particulière (trouvée en 1-a)).

$$X'(t) - X(t) = 0 \iff X(t) = Ce^t \quad (C \in \mathbb{R})$$ — 0,75 point

D'où

$$X(t) = (t^2 + t + C)e^t \qquad (C \in \mathbb{R})$$

2/ $$Y'(t) - Y(t) = 2e^t \qquad (E_2)$$

Solution de l'équation homogène : — 1 point

$$Y'(t) - Y(t) = 0 \qquad Y = ke^t \quad (k \in \mathbb{R})$$

Recherche d'une solution particulière (méthode de variation de la constante)

$$g(t) = k(t)e^t$$
$$g'(t) = [k'(t) + k(t)]e^t$$

soit :

$$g'(t) - g(t) = 2e^t \iff k'(t) = 2$$

On choisit $k(t) = 2t$ et $g(t) = 2t\,e^t$

Les solutions de (E_2) sont :

$$Y(t) = (2t + k)e^t \quad , \quad (k \in \mathbb{R})$$

3) a) $$z'(t) = z(t)$$

$$z(t) = \lambda e^t \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$ 0,5 point

condition initial $z(0) = 1 \iff \lambda = 1$

$$z(t) = e^t$$

b) En reportant dans (2), on obtient :

$$Y'(t) - Y(t) = 2e^t$$

d'où $Y(t) = (2t + k)e^t \qquad (k \in \mathbb{R})$

avec $Y(0) = 1$, d'où $k = 1$

$$Y(t) = (2t + 1)e^t$$

En reportant dans (1), on obtient

$$X'(t) - X(t) = (2t + 1)e^t$$ 1 point.

d'où (question 1) $X(t) = (t^2 + t + C)e^t$

avec $X(0) = 1$, d'où $C = 1$

Solution du système (S) :

$$\begin{cases} X(t) = (t^2 + t + 1)e^t \\ Y(t) = (2t + 1)e^t \\ z(t) = e^t \end{cases}$$

Partie II

1- a) $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$

Coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $f(\vec{v}_1)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$$ 1 point

$\vec{v}_1$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.

1- b) $\vec{v}_2 = -\vec{e}_2$; $\vec{v}_3 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

$$\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \gamma \vec{v}_3 = \vec{0} \iff \alpha(\vec{e}_1 - \vec{e}_3) + \beta(-\vec{e}_2) + \gamma(\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = \vec{0}$$
$$\iff \alpha \vec{e}_1 + (\gamma - \beta)\vec{e}_2 + (-\alpha - \gamma)\vec{e}_3 = \vec{0}$$

$\mathcal{B}$ étant une base de $\mathbb{R}^3$, on a : $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma - \beta = 0 \\ -\alpha - \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$ 1 point

$\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une partie libre, de dimension 3 de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2)

$$f(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$$
$$f(\vec{v}_2) = f(-\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$
$$f(\vec{v}_3) = f(\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = f(\vec{e}_2) - f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - (-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)$$
$$= -\vec{e}_3 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

D'où la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$: 1 point

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

3) a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Soit $\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ la matrice inverse de P

$P \times P^{-1} = P^{-1} \times P = I$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ -b+c & -b'+c' & -b''+c'' \\ -a-c & -a'-c' & -a''-c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a = 1$; $a' = 0$; $a'' = 0$

$-b+c = 0$; $-b'+c' = 1$; $-b''+c'' = 0$

$-a-c = 0$; $-a'-c' = 0$ $-a''-c'' = 1$

D'où $a = 1$; $a' = 0$; $a'' = 0$

$c = -1$; $c' = 0$; $c'' = -1$ 1,5 point

$b = -1$; $b' = -1$; $b'' = -1$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3-b)

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ 0,5 point

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

Partie III :

1/ $$V = AU + B$$

$$V = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \qquad AU+B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AU+B = \begin{pmatrix} -y(t)-z(t) \\ x(t)+y(t)+z(t)-e^t \\ x(t)+y(t)+2z(t) \end{pmatrix}$$ 0,5 point

$V = AU+B$ est le système Σ

2/ a) $$V = AU+B \iff P^{-1}V = P^{-1}AU + P^{-1}B$$

(P^{-1} est inversible) $$\iff Q = \underbrace{P^{-1}AP}_{T}W + P^{-1}B$$

car: $$\iff Q = TW + P^{-1}B$$ 0,5 point

$$V = PQ \iff P^{-1}V = Q$$

b) $$Q = TW + P^{-1}B \iff \begin{cases} X'(t) = X(t) + Y(t) \\ Y'(t) = Y(t) + Z(t) + e^t \\ Z'(t) = Z(t) \end{cases}$$

De plus, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = -2$.

$W = P^{-1}U$ donne.

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \\ Z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

X, Y, Z vérifient bien le système de la partie I. 0,5 point

On en déduit, grâce à la relation $U = PW$:

$$\begin{cases} x(t) = (t^2+t+1)e^t \\ y(t) = -2t\,e^t \\ z(t) = (-t^2-t-2)e^t \end{cases}$$ 0,5 point

Exercice 3 (BTS CIRA et Electronique)

Partie A :

1)

$$\begin{cases} v_s(t) + RC_2 \dfrac{dv_s}{dt}(t) = f(t) \\ v_e(t) = f(t) + R(C_2 - C_1)\dfrac{dv_s}{dt}(t) + RC_1 \dfrac{df}{dt}(t) \end{cases}$$

$$v_s(0^+) = f(0^+) = 0$$

La transformation de Laplace étant linéaire, on obtient :

$$\begin{cases} V_s(p) + RC_2\big(p\,V_s(p) - v_s(0^+)\big) = F(p) \\ V_e(p) = F(p) + R(C_2 - C_1)\big(p V_s(p) - v_s(0^+)\big) + RC_1\big(pF(p) - f(0^+)\big) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_s(p) + RC_2\, p \times V_s(p) = F(p) \\ V_e(p) = F(p) + R(C_2 - C_1)\,p\,V_s(p) + RC_1\,p\,F(p) \end{cases}$$ 1 point

2)

$$\begin{cases} V_s(p)\left[1 + RC_2 p\right] = F(p) \\ V_e(p) = p\,R(C_2 - C_1)\,V_s(p) + F(p)\left[1 + RC_1 p\right] \end{cases}$$

$$V_e(p) = p\,R(C_2 - C_1)\,V_s(p) + (1 + RC_2 p)V_s(p)\left[1 + RC_1 p\right]$$

$$= V_s(p)\left[1 + p(RC_2 - \cancel{RC_1} + \cancel{RC_1} + RC_2) + R^2C_1C_2p^2\right]$$

D'où la fonction de transfert du système : 1 point

$$H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{1 + 2pRC_2 + R^2C_1C_2p^2}$$

3)

$$\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}} \iff \omega_0^2 = \frac{1}{R^2C_1C_2} \quad (\omega_0 \text{ positif})$$

$$m = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \quad \text{d'où} \quad \frac{m}{\omega_0} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \times R\sqrt{C_1C_2} = RC_2$$

Soit : $$H(p) = \frac{1}{1 + 2m\dfrac{p}{\omega_0} + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$$ 1 point

Partie B :

1)
$$k(s) = H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2m\frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}$$
$$= \frac{1}{1 + \frac{2}{\sqrt{2}}js - s^2} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}js - s^2}$$
0,5 point

2)
$$k(s) = \frac{1 - s^2 - \sqrt{2}js}{(1-s^2)^2 + 2s^2} = \frac{1-s^2}{1+s^4} - j\,\frac{\sqrt{2}s}{1+s^4}$$
1 point

On a $x(s) = \mathcal{R}(k(s)) = \dfrac{1-s^2}{1+s^4}$

$y(s) = \mathcal{I}m(k(s)) = \dfrac{-\sqrt{2}s}{1+s^4}$

3)
$$\begin{cases} x(s) = \dfrac{1-s^2}{1+s^4} \\ y(s) = \dfrac{-\sqrt{2}s}{1+s^4} \end{cases}$$

a)
$$x'(s) = \frac{2s(s^4 - 2s^2 - 1)}{(1+s^4)^2}$$
$$y'(s) = \frac{\sqrt{2}\,(3s^4 - 1)}{(1+s^4)^2}$$
2 points

s étant positif $x'(s)$ est du signe de $s^4 - 2s^2 - 1$

$y'(s)$ " " " " $3s^4 - 1$

D'où le tableau des variations conjointes de x et y :

s	0		$\sqrt[4]{1/3}$		$\sqrt{1+\sqrt{2}}$		$+\infty$
sgn $x'(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$	
variation de x	1	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	0
variation de y	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	0
sgn $y'(t)$	$-\sqrt{2}$	$-$	0	$+$		$+$	

0,5 point

$$\lim_{s \to 0} x(s) = x(0) = 1$$

$$\lim_{s \to 0} y(s) = y(0) = 0$$

$$\lim_{s \to +\infty} x(s) = \lim_{s \to +\infty} \left(-\frac{s^2}{s^4}\right) = 0$$

$$\lim_{s \to +\infty} y(s) = \lim_{s \to +\infty} \left(\frac{-s\sqrt{2}}{s^4}\right) = 0$$

1 point

Valeurs approchées des "points remarquables" :

$$x\left(\sqrt[4]{1/3}\right) \simeq 0{,}32$$
$$y\left(\sqrt[4]{1/3}\right) \simeq -0{,}80$$

$$x\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right) \simeq -0{,}2$$
$$y\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right) \simeq -0{,}32$$

0,5 point

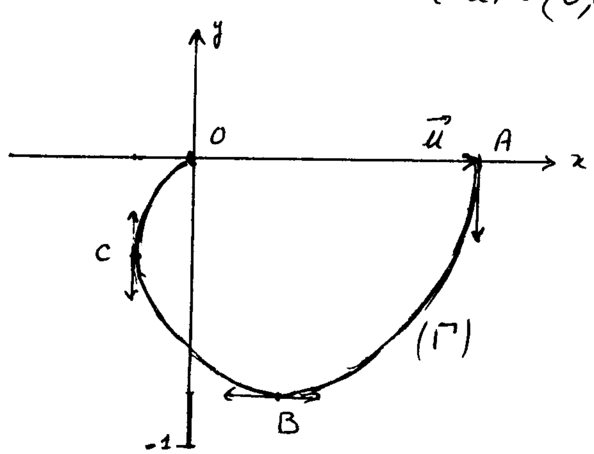
8) Au point de paramètre s, le vecteur tangent à la courbe a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$ si l'une au moins de ces coordonnées est non nulle.

en A $(s=0)$ $\quad \vec{V_A}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ tangente parallèle à l'axe $(O,\vec{v})$

en B $\left(s=\sqrt[4]{1/3}\right)$ $\quad \vec{V_B}\begin{pmatrix} \alpha \neq 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tangente parallèle à l'axe $(O,\vec{u})$

en C $\left(s=\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$ $\quad \vec{V_C}\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \neq 0 \end{pmatrix}$ tangente parallèle à l'axe $(O,\vec{v})$

1,5 point



1 point