MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures

Coefficient : 1

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pur une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé et le formulaire officiel de mathématiques est joint.

Le sujet comporte 3 pages : 1/3 à 3/3.

Le formulaire comporte 4 pages : E1 à E4.

EXERCICE n° 1 *(7 points)*

I - Une machine produit des composants électriques. La machine est réglée chaque jour lors de sa mise en route ; elle fonctionne ensuite en continu, d'une façon régulière, pendant 12 heures. Les composants produits peuvent être affectés d'un certain défaut D. On constate, au cours des 12 heures de fonctionnement journalier, que la probabilité qu'un composant fabriqué à l'instant t possède le défaut D est donné par $f(t) = \frac{t^2}{576}$, où t, exprimé en heures, décrit l'intervalle $[0 ; 12]$ de $\mathbf{R}$.

On note p la probabilité qu'un composant pris au hasard dans la production journalière présente le défaut D. On décide de prendre pour valeur de p la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0 ; 12]$.
Calculer p.

II - 1-On note X la variable aléatoire qui, à chaque composant ayant le défaut D, associe sa durée de vie exprimée en années. Une étude a montré que X suit la loi normale de moyenne $m_1 = 0,8$ et d'écart type $\sigma_1 = 0,4$.

Calculer la probabilité p_1 qu'un composant ayant le défaut D ait une durée de vie inférieure à un an.

2-On note Y la variable aléatoire qui, à chaque composant ne présentant pas le défaut D, associe sa durée de vie exprimée en années. Une étude a montré que Y suit la loi normale de moyenne $m_2 = 3$ et d'écart type $\sigma_2 = 1$.

Calculer la probabilité p_2 qu'un composant ne présentant pas le défaut D ait une durée de vie inférieure à un an.

3-On suppose dans cette question que la probabilité qu'un composant pris au hasard dans la production journalière présente le défaut D est $p = 0,08$.

a) Calculer la probabilité p_3 qu'un composant choisi au hasard dans la production d'une journée ait une durée de vie inférieure à un an.

b) On tire au hasard dans la production d'une journée 20 composants (on suppose la production suffisamment importante pour assimiler ce tirage à un tirage avec remise).

Calculer la probabilité p' que l'un au moins des composants tirés ait une durée de vie inférieure à un an.

EXERCICE n° 2 : *(13 points)*

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

I - On veut résoudre sur l'intervalle [0 ; + ∞[le système différentiel S suivant, où *f* et *g* sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle [0 ; + ∞[:

$$\begin{cases} f'(t) + f(t) + g(t) = 0 \\ g'(t) + g(t) - f(t) = 0 \\ f(0) = 1 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

On admet que les fonctions *f*, *g*, *f '* et *g'* ont des transformées de Laplace.

1-On note *F(p)* et *G(p)* les transformées de Laplace de *f* et de *g*.

Montrer que $F(p) = \dfrac{p+1}{(p+1)^2+1}$ et que $G(p) = \dfrac{1}{(p+1)^2+1}$.

2-En déduire les fonctions *f* et *g*.

II - 1-On considère la fonction z qui à tout élément t de l'intervalle $[0 ; \pi]$ associe le nombre complexe $z(t)$ défini par : $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ où $x(t) = e^{-t}\cos t$ et $y(t) = e^{-t}\sin t$.

a) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$. Vérifier que $x'(t) = -\sqrt{2}\,e^{-t}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

et que $y'(t) = \sqrt{2}\,e^{-t}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) Etudier le signe de $x'(t)$ et de $y'(t)$ sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Résumer dans un seul tableau les variations des fonctions x et y pour t élément de l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

d) Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 10 cm. Soit C_1 l'ensemble des points $M(t)$ d'affixe $z(t)$ où t est élément de l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Calculer les coefficients directeurs des tangentes à C_1 aux points A, B, C d'affixes respectives $z(0)$, $z\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $z\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Tracer ces tangentes puis tracer C_1.

2-On veut maintenant tracer l'ensemble C_2 des points $M\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ d'affixe $z\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$, où t est élément de l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Montrer que $z\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} \times i \times z(t)$.

b) En déduire que $M\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ est l'image de $M(t)$ par une similitude de centre O dont on précisera le rapport et l'angle.

c) Placer les points D et E de C_2 d'affixes respectives $z\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $z(\pi)$, puis esquisser l'allure de la courbe C_2.