MATHÉMATIQUES

Durée 2 heures

Coefficient : 1

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

EXERCICE n° 1 (7 points)

N.B. : Les résultats numériques seront donnés avec une précision de 10^{-3}.

Pour entrer sur une section d'autoroute, on jette une pièce de 10 F dans un panier. La masse de la pièce est alors testée par un appareil.

L'appareil accepte les pièces dont la masse est comprise entre 6,455 g et 6,525 g.

I . On note X la variable aléatoire qui à chaque pièce de 10 F frappée par la Banque de France associe sa masse exprimée en grammes. Cette variable aléatoire suit une loi normale de moyenne $m = 6{,}49$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}015$.

Calculer la probabilité qu'une pièce de 10 F frappée par la Banque de France soit acceptée par l'appareil.

II . Des faussaires mettent en circulation un grand nombre de fausses pièces de 10 F. On note Y la variable aléatoire qui à chaque fausse pièce de 10 F associe sa masse exprimée en grammes. Cette variable aléatoire Y suit une loi normale de moyenne $m' = 6{,}56$ et d'écart-type $\sigma' = 0{,}02$.

Calculer la probabilité qu'une fausse pièce de 10 F soit acceptée par l'appareil (on pourra prendre 1 comme valeur approchée de $\pi(t)$ lorsque t est supérieur à 5).

III . On estime que :

- $\frac{1}{20}$ des pièces de 10 F jetées dans le panier ont été mises en circulation par les faussaires.
- Les autres pièces de 10 F jetées dans le panier ont été frappées par la Banque de France.

Soit A l'événement "la pièce de 10 F jetée dans le panier est acceptée par l'appareil".

Soit B l'événement "la pièce de 10 F jetée dans le panier a été frappée par la Banque de France" et $\overline{B}$ l'événement contraire.

Dans la suite on suppose que la probabilité de l'événement. "A sachant que B est réalisé" est 0,98 et que la probabilité de l'événement "A sachant que $\overline{B}$ est réalisé" est 0,04.

1 . Calculer la probabilité de l'événement A.

2 . **a)** Calculer la probabilité qu'une pièce de 10 F jetée dans le panier ait été frappée par la Banque de France et soit refusée par l'appareil.

b) Calculer la probabilité qu'une pièce de 10 F jetée dans le panier ait été mise en circulation par les faussaires et soit acceptée par l'appareil.

EXERCICE n° 2 (13 points)

Un signal est modélisé par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f \text{ est paire et périodique de période } \pi \\ f(t) = t \sin t \text{ pour } t \text{ élément de l'intervalle } \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

1 . a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Soit C_1 la partie de la représentation graphique de f sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, relativement à un repère orthonormal du plan (unité graphique 2 cm).

Tracer les tangentes à C_1 aux points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$. Tracer C_1.

c) Dans le même repère tracer la représentation graphique C de f sur l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$.

2 . On admet que f est développable en série de Fourier et que, pour tout t élément de $\mathbb{R}$,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2nt + b_n \sin 2nt)$$

a) Justifier que $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

b) Calculer a_0.

c) Montrer que $a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,(\sin 3t - \sin t)\,dt$.

En déduire que $a_1 = -\frac{20}{9\pi}$.

Dans la suite on utilisera le résultat : $a_n = \frac{2}{\pi}(-1)^n \left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n-1)^2} \right]$ pour $n \geq 1$.

3 . On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = a_0 + a_1 \cos 2t + a_2 \cos 4t$.

On admet que la formule de Parseval appliquée à g donne une valeur approchée à 10^{-3} près de la valeur efficace f_e de la fonction f. Calculer alors une valeur approchée à 10^{-3} près de f_e.