MATHÉMATIQUES

Durée 2 heures Coefficient : 1

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les différentes questions peuvent être traitées, en général, de manière indépendante, dans chacun des exercices.

L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Exercice 1 (9 points)

Dans un laboratoire, un technicien étudie l'établissement d'un courant d'intensité i dans un circuit de type R , L , C ; i est une fonction à valeurs réelles de la variable réelle t définie comme suit :

$$\begin{cases} \text{si } t < 0 \text{ alors } \mathrm{i}(t) = 0 \\ \text{si } t \geq 0 \text{ alors } \dfrac{1}{2}\mathrm{i}''(t) + \mathrm{i}'(t) + \mathrm{i}(t) = (t+1)\mathrm{U}(t) \\ \mathrm{i}(0^+) = 1 \text{ et } \mathrm{i}'(0^+) = 0 \end{cases}$$

U est la fonction échelon unité, définie par $\mathrm{U}(t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathrm{U}(t) = 1$ si $t \geq 0$.

1) Déterminer, à l'aide de la variable réelle p, la transformée de Laplace de la fonction

$$t \mapsto (t+1)\mathrm{U}(t).$$

2) Exprimer, à l'aide de la variable réelle p et de la transformée de Laplace I de i, la transformée de Laplace de la fonction : $t \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{i}''(t) + \mathrm{i}'(t) + \mathrm{i}(t)$.

3) En déduire, pour $p > 0$, $\mathrm{I}(p)$ en fonction de p.

4) Montrer que, pour $p > 0$, $\mathrm{I}(p)$ s'écrit sous la forme : $\mathrm{I}(p) = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{p+1}{(p+1)^2+1}$.

5) Déduire de ce qui précède l'expression de $\mathrm{i}(t)$ en fonction de t.

6) Le technicien, chargé de cette étude, s'intéresse maintenant aux valeurs approchées de $\mathrm{i}(t)$ lorsque t est positif et proche de 0. Il considère, à cet effet, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{f}(x) = x + (\cos x)\mathrm{e}^{-x}$$

Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 en $x = 0$. (On pourra utiliser les développements limités de $\cos x$ et e^{-x} à l'ordre 3 en zéro).

On admettra que le technicien peut alors écrire $i(t) = 1 + \frac{1}{3}t^3 + t^3\varepsilon(t)$, pour t positif, avec

$\lim\limits_{t \to 0^+} \varepsilon(t) = 0$.

Exercice 2 (11 points)

Cet exercice porte sur l'étude de la fonction de transfert T, de la variable réelle positive w (pulsation), définie par :

$$T(w) = \frac{1 + j\frac{w}{w_0}}{1 + 2j\frac{w}{w_0}}$$

où w_0 (pulsation propre) est un réel strictement positif connu et où j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

A cet effet on pose $x = \frac{w}{w_0}$ et on considère alors la fonction f, de la variable réelle positive x, définie par : $f(x) = \frac{1 + jx}{1 + 2jx}$.

Le but de cet exercice est alors, en particulier, de définir et de représenter l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points, d'affixe $f(x)$, obtenus lorsque x parcourt l'intervalle $[0, +\infty[$.
Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(0; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 10 cm pour unité graphique et l'on présentera une seule figure pour tout l'exercice.

1) a) Calculer f(0) et f(1). Placer les points images correspondants A et B de $(\mathscr{C})$ sur la figure.

b) Résoudre l'équation $f(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}j$. Placer le point C d'affixe $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}j$ de $(\mathscr{C})$ sur la figure.

2) Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$, le module de $f(x) - \frac{3}{4}$ est égal à $\frac{1}{4}$.

En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ est une partie d'un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3) Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$: $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + 2jx}$.

4) Définir alors et représenter sur la figure successivement :

a) la demi-droite $(\mathcal{D})$ ensemble des points d'affixe $z = 1 + 2jx$ lorsque x décrit l'intervalle $[0, +\infty[$.

b) le demi-cercle $(\mathcal{C}_1)$ ensemble des points d'affixe $z_1 = \dfrac{1}{z}$ en utilisant les propriétés de l'inversion complexe.

c) l'ensemble $(\mathcal{C}_2)$ des points d'affixe $z_2 = \dfrac{1}{2} z_1$.

d) la courbe $(\mathcal{C})$.

5) On pose, pour x réel positif, $\varphi(x) = \text{Arc}\tan(x) - \text{Arc}\tan(2x)$.

On admet alors que $\varphi(x)$ est l'argument de $f(x)$ compris entre $-\pi$ et π et l'on donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction φ .

x	0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$	[redacted]	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	[redacted]	$\searrow$	$\varphi(\dfrac{\sqrt{2}}{2})$	$\nearrow$	0

a) Justifier par le calcul que : $\varphi'(\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = 0$.

b) En utilisant la courbe $(\mathcal{C})$, interpréter graphiquement le résultat : $\varphi(\dfrac{\sqrt{2}}{2}) \approx -0{,}34$.