

MATHÉMATIQUES

Durée 2 heures

Coefficient : 1

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Exercice 1 (8 points)

Une entreprise fabrique des brioches en grande quantité.

On pèse les boules de pâte avant cuisson. On note X la variable aléatoire qui, à chaque boule de pâte, associe sa masse. On admet que X suit la loi normale de moyenne 700 g et d'écart-type 20 g.

1) Seules les boules dont la masse est comprise entre 660 g et 732 g sont acceptées à la cuisson.

Quelle est la probabilité qu'une boule, prise au hasard dans la production, soit acceptée à la cuisson ?

2) On désigne par h un réel positif. Déterminer h afin que l'on ait : $P(700 - h \leq X \leq 700 + h) \geq 0,95$.

3) On admet que 8 % des boules sont refusées à la cuisson.

On prélève au hasard, successivement et avec remise, n boules dans la production. On note Y_n la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de n boules, associe le nombre de boules qui seront refusées à la cuisson. Cette variable aléatoire Y_n suit une loi binomiale.

a- Dans le cas $n = 10$, calculer la probabilité d'avoir, parmi les 10 boules prélevées, exactement 3 boules refusées à la cuisson.

b- Dans le cas $n = 50$, on admet que l'on peut approcher la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_{50} par une loi de Poisson.

Préciser le paramètre de cette loi de Poisson.

Calculer alors la probabilité d'avoir, parmi les 50 boules prélevées, exactement 4 boules refusées à la cuisson, puis la probabilité d'avoir au moins 45 boules acceptées à la cuisson.

Exercice 2 (12 points)

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie comme suit :

$$\begin{cases} f \text{ est paire} \\ f \text{ est périodique et a pour période } 2\pi. \\ f(t) = 1 - \sin t \quad \text{si } 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

1) Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.

Le plan sera muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm en abscisse, 5 cm en ordonnée).

2) On se propose de calculer les coefficients a_n et b_n du développement en série de Fourier de la fonction f .

a- Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $b_n = 0$.

b- Calculer a_0 .

c- Calculer a_1 .

d- Calculer a_n en fonction de n dans le cas $n \geq 2$.

En déduire $a_{2p} = \frac{4}{\pi(4p^2 - 1)}$ et $a_{2p+1} = 0$, où p est un entier naturel non nul.

e- Ecrire le développement en série de Fourier de la fonction f .

3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = 1 - \frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi} \cos 2t + \frac{4}{15\pi} \cos 4t$.

a- Démontrer que g est paire. Démontrer que g est périodique et admet pour période π .

b- On étudie g sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Calculer $g'(t)$ et démontrer que l'on a : $g'(t) = \frac{-8}{3\pi} (\sin 2t) \left(1 + \frac{4}{5} \cos 2t\right)$.

En déduire le sens de variation de g sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

c- Sur le graphique de la question 1), dessiner la courbe représentative de g sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

On placera les tangentes à cette courbe aux points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$.