Epreuve : **MATHEMATIQUES**

Durée : 2 h Coefficient : 1

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

EXERCICE 1 (14 points)

En physique, l'étude d'un mouvement amorti amène à considérer la fonction $t \mapsto f(t)$ telle que :

a) $f(t) = 0$ pour $t < 0$

b) $f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) = e^{-t}$ pour $t \geq 0$

c) $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

A Application de la transformation de Laplace

On suppose que la fonction f et ses dérivées admettent des transformées de Laplace. On note F celle de f.

1°) Déterminer à l'aide de F, les transformées de Laplace des fonctions f' et f''. En déduire celle de $f'' + 2f' + 2f$.

2°) Déterminer la transformée de Laplace de $t \longmapsto U(t)e^{-t}$ où U est l'échelon unité.

3°) Déduire de ce qui précède l'équation (E) vérifiée par la fonction F.

B Résolution de l'équation (E) et recherche de f

1°) Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout réel $p \neq -1$ on ait :

$$\frac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)} = \frac{a}{p+1} + \frac{bp+c}{p^2+2p+2}.$$

2°) En déduire la fonction f vérifiant les trois conditions a) b) c) données ci-dessus.

C Etude de la fonction f

1°) Etudier les variations des fonctions g et h définies sur l'intervalle $[0, \pi]$ par $g(t) = e^{-t}$ et $h(t) = e^{-t}\sin t$.
(On montrera que $h'(t) = \sqrt{2}\, e^{-t} \cos(t + \pi/4)$.)

2°) Construire dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées) les courbes représentatives des fonctions g et h.

3°) En déduire la courbe représentative dans le même repère de la fonction f égale à $g + h$ sur $[0, \pi]$. On précisera la tangente pour $t = 0$.

4°) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur $[0, \pi]$.

EXERCICE 2 (6 points)

Une machine fabrique des résistances électriques dont la valeur en ohms est une variable aléatoire R de loi normale de paramètres $m = 100$ et $\sigma = 3$. Une seconde machine fabrique des résistances dont la valeur en ohms est une variable aléatoire R' de loi normale de paramètres $m' = 200$ et $\sigma' = 4$.

Le montage en série de deux résistances prélevées au hasard dans les productions respectives de la première et de la deuxième machine donne une résistance dont la valeur en ohms est la variable aléatoire $R'' = R + R'$.

1°) Calculer l'espérance de R".

2°) On suppose que les variables R et R' sont indépendantes. Calculer alors la variance de R" donnée par la formule $V(R'') = V(R) + V(R')$.

3°) On admet que R" suit une loi normale.

Quelle est la probabilité qu'une résistance ainsi obtenue ait une valeur comprise entre 290 et 305 ohms ?