

MATHÉMATIQUES

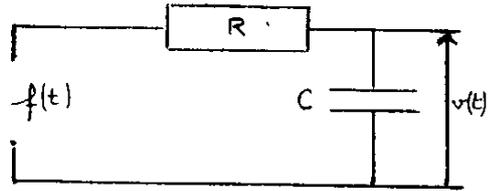
durée : 2 heures

coefficient : 1

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

EXERCICE 1 (12 points)

Dans le circuit ci-contre, on se propose de rechercher grâce à la transformation de Laplace la fonction du temps donnant la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur.



La force électromotrice f appliquée aux bornes du circuit est définie en fonction de t par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ f(t) = E & \text{si } 0 \leq t < A \\ f(t) = 0 & \text{si } A \leq t \end{cases}$$

où A et E sont des nombres réels strictement positifs.

L'équation différentielle qui régit le circuit s'écrit :

$$\begin{cases} RC \frac{dv}{dt}(t) + v(t) = f(t) \\ v(t) = 0 \text{ pour } t \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

1°) Représenter graphiquement la fonction f et exprimer f à l'aide de la fonction échelon unité.

2°) Déterminer la transformée de Laplace de chacun des deux membres de l'équation (1).

(On notera $V(p) = \mathcal{L}\{v(t)\}$.)

3°) Montrer que

$$V(p) = E \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{RC}} \right) (1 - e^{-pA}).$$

4°) En déduire les expressions de $v(t)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $[0, A[$, $[A, +\infty[$.

5°) Application numérique

On donne $R = 10^3 \Omega$, $C = 10^{-2} \text{F}$, $A = 1 \text{s}$, $E = 1 \text{V}$.
Tracer alors le signal associé à la fonction v .

EXERCICE 2 (8 points)

Une machine usine des pièces dont la longueur X suit une loi normale de moyenne $m = 54$ et d'écart-type $\sigma = 0,2$.

Une pièce est considérée comme défectueuse si $X < 53,6$ ou $X > 54,3$.

1°) a) Calculer la probabilité p pour qu'une pièce soit défectueuse.

b) Pour vérifier que la machine ne s'est pas dérégulée, on détermine des cotes d'alerte $m - h$ et $m + h$ définies par :

$$P(m - h \leq X \leq m + h) = 0,95.$$

Calculer les cotes d'alerte. (On utilisera la variable centrée réduite.)

2°) On admet que la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse est $p = 0,09$.
Un acheteur achète un lot de 40 pièces.

Calculer les probabilités :

- de n'avoir aucune pièce défectueuse dans le lot.
- d'avoir au plus deux pièces défectueuses.