Corrigé du BTS groupement A métropole-La Réunion 2018

EXERCICE 1 **12 POINTS**

A-1. On pose $x_0(t) = \mathrm{C}$ avec C constante réelle. On a $x_0'(t) = 0$ et :

$$x_0 \text{ solution de (E)} \iff 2x_0'(t) + x_0(t) = 6 \iff 2 \times 0 + \mathrm{C} = 6 \iff \mathrm{C} = 6$$

La seule fonction constante solution est donc $x_0 : t \longmapsto 6$.

A-2. En utilisant le formulaire avec $a = 2$ et $b = 1$, on a : **les solutions de ($\mathrm{E_0}$) sont les fonctions $t \longmapsto k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ sur $[0\,;+\infty[$ avec k constante réelle.**

A-3. On sait que les solutions de (E) sont somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre. On a donc : **les solutions de (E) sont les fonctions $t \longmapsto 6 + k\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ sur $[0\,;+\infty[$, avec k constante réelle.**

A-4. On a s solution de (E) donc, pour $t \geqslant 0$, $s(t) = 6 + k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$. Puisque $s(0) = 0$, on a $6 + k\mathrm{e}^0 = 0$, d'où $k = -6$. On a donc, pour $t \geqslant 0$: $s(t) = 6 - 6\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$, soit $\boldsymbol{s(t) = 6\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)}$.

A-5. **a.** La droite d'équation $y = 6$ semble être une asymptote à la courbe en $+\infty$. **6 est la limite en $+\infty$ de la fonction s.**

b. La tension finale est de 6 V et on a $s(2) = 6(1 - \mathrm{e}^{-1}) \approx 3{,}793$. De plus : $\dfrac{3{,}793}{6} \times 100 \approx 63{,}2$. On conclut : **à $t = 2$, on a atteint environ 63 % de la tension finale.**

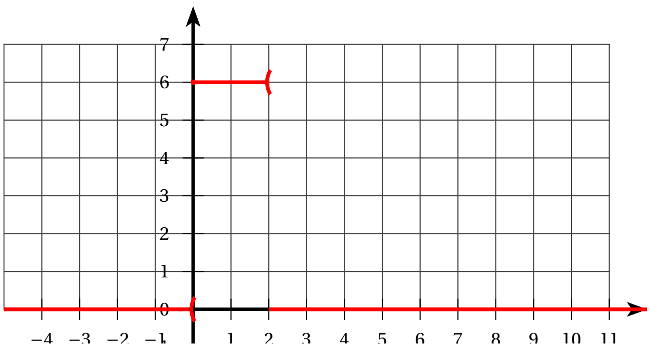
A-6. **a.** On a $6 \times 95/100 = 5{,}7$. On doit donc déterminer lorsque $s(t) \geqslant 5{,}7$. On construit la droite d'équation $y = 5{,}7$. On regarde l'abscisse du point où la courbe la dépasse. On obtient : **le condensateur est chargé au bout d'environ 6 secondes.**

b. On résout algébriquement l'inéquation $s(t) > 5{,}7$:

$$s(t) > 5{,}7 \iff 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} > \frac{5{,}7}{6} \iff \mathrm{e}^{-t/2} < 0{,}05 \iff -\frac{t}{2} < \ln(0{,}05) \iff t > -2\ln(0{,}05)$$

On a $-2\ln(0{,}05) = -2\ln\dfrac{5}{100} = 2\ln\dfrac{100}{5} = \ln 20^2 = \ln(400) \approx 5{,}99$. Ainsi, **on atteint le régime permanent au bout de 5,99 secondes.**

B-1. **a.** On a immédiatement :



b. On a $\mathscr{L}[\mathcal{U}(t)] = \dfrac{1}{p}$ et $\mathscr{L}[\mathcal{U}(t-2)] = \dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-2p}$ (théorème du retard avec un retard de 2).
Puisque $e(t) = 6\mathcal{U}(t) - 6\mathcal{U}(t-2)$, on a $\mathrm{E}(p) = 6\mathscr{L}[\mathcal{U}(t)] - 6\mathscr{L}[\mathcal{U}(t-2)]$, donc $\boldsymbol{\mathrm{E}(p) = \dfrac{6}{p} - \dfrac{6}{p}\mathrm{e}^{-2p}}$.

B-2. **a.** En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle, on a :

$$2\mathscr{L}[s'(t)] + \mathscr{L}[s(t)] = \mathrm{E}(p)\,.$$

On sait que $\mathscr{L}[s'(t)] = p\mathrm{S}(p) - s(0^+) = p\mathrm{S}(p)$ puisque $s(0) = 0$.
En reportant, on obtient : $\boldsymbol{2p\mathrm{S}(p) + \mathrm{S}(p) = \mathrm{E}(p)}$.

b. On reprend ce qui précède :

$$2p\mathrm{S}(p)+\mathrm{S}(p)=\mathrm{E}(p) \iff (2p+1)\mathrm{S}(p)=\frac{6}{p}-\frac{6}{p}\mathrm{e}^{-2p} \iff \mathrm{S}(p)=\frac{6}{p(2p+1)}-\frac{6}{p(2p+1)}\mathrm{e}^{-2p}$$

On a bien obtenu l'égalité proposée.

B-3. **a.** $\dfrac{6}{p}-\dfrac{12}{2p+1}=\dfrac{6(2p+1)-12p}{p(2p+1)}=\dfrac{6}{p(2p+1)}$, donc on a bien $\boldsymbol{\dfrac{6}{p(2p+1)}=\dfrac{6}{p}-\dfrac{12}{2p+1}}$.

b. $\mathrm{A}(p)=\dfrac{6}{p}-\dfrac{6}{p+\frac{1}{2}}$, donc $a(t)=\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{A}(p)]=6\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p}\right]-6\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p+\frac{1}{2}}\right]$.

À l'aide du formulaire, on déduit : $\boldsymbol{a(t)=6\mathcal{U}(t)-6\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\mathcal{U}(t)}$.

B-4. $\mathrm{S}(p)=\mathrm{A}(p)-\mathrm{A}(p)\mathrm{e}^{-2p}$, donc $s(t)=\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{A}(p)]-\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{A}(p)\,\mathrm{e}^{-2p}]$. Dans le terme $\mathrm{A}(p)\mathrm{e}^{-2p}$, on reconnaît un retard de 2. Son original est donc $a(t-2)\mathcal{U}(t-2)$. Il suit $s(t)=a(t)\mathcal{U}(t)-a(t-2)\mathcal{U}(t-2)$.

En remplaçant $a(t)$ par son expression, on a finalement :

$$s(t)=6\mathcal{U}(t)-6\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\mathcal{U}(t)-\left(6\mathcal{U}(t-2)-6\mathrm{e}^{-x\frac{1}{2}(t-2)}\mathcal{U}(t-2)\right)$$

soit $\boldsymbol{s(t)=6\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\right)\mathcal{U}(t)-6\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t-2)}\right)\mathcal{U}(t-2)}$.

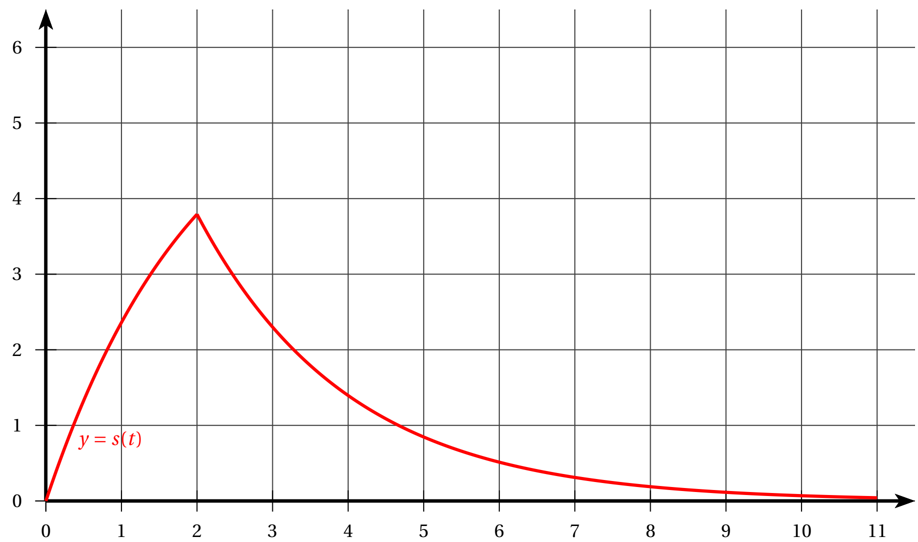
B-5. **a.** Pour $t\geqslant 2$: $s(t)=6(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ induit $s'(t)=6(\mathrm{e}-1)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$, donc $s'(t)=3(1-\mathrm{e})\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

On a $3>0$, $1-e<0$ (car $e>1$) et $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}>0$ car une exponentielle est toujours strictement positive. On en déduit $\forall t\geqslant 2$, $s'(t)<0$. On peut donc affirmer que **la fonction s est décroissante sur $[2\,;+\infty[$**.

b. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}t\right)=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{\mathrm{T}\to-\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{T}}=0$, donc, par composition, on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}=0$.

On en déduit par opérations $\boldsymbol{\displaystyle\lim_{t\to+\infty}s(t)=0}$.

B-6. **a.**



b. Dans un premier temps, lorsque la tension à l'entrée est de 6V, le condensateur se charge. À $t=2$s, lorsque la tension à l'entrée devient nulle, le condensateur se décharge progressivement dans le circuit.

EXERCICE 2 **8 POINTS**

A-1. On a $\mathrm{R} \hookrightarrow \mathcal{N}(200;3{,}5)$. La probabilité que le composant soit accepté est $\mathrm{P}(195 \leqslant \mathrm{R} \leqslant 205)$; on l'évalue avec `normalFrép(195,205,200,3.5)` ($\approx 0{,}8469$). **La probabilité que le composant soit accepté est d'environ 0,85**.

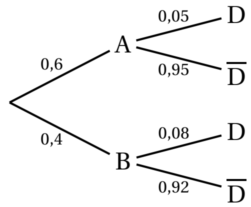
A-2. **a.** On centre et on réduit :

$$\mathrm{P}(\mathrm{R} \in [\mu-2\sigma\,;\,\mu+2\sigma]) = \mathrm{P}(\mu-2\sigma \leqslant \mathrm{R} \leqslant \mu+2\sigma) = \mathrm{P}\left(-2\sigma \leqslant \mathrm{R}-\mu \leqslant 2\sigma\right) = \mathrm{P}\left(-2 \leqslant \frac{\mathrm{R}-\mu}{\sigma} \leqslant 2\right)$$

On a $\mathrm{R} \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu;\sigma)$, donc $\dfrac{\mathrm{R}-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$. On obtient donc $\mathrm{P}\left(-2 \leqslant \dfrac{\mathrm{R}-\mu}{\sigma} \leqslant 2\right)$ en tapant `normalFrép(-2,2,0,1)` ($\approx 0{,}9545$). On a ainsi $\mathbf{P(R \in [\boldsymbol{\mu}-2\boldsymbol{\sigma}\,;\,\boldsymbol{\mu}+2\boldsymbol{\sigma}]) \approx 0{,}95}$.

b. On veut que $\mathrm{P}(195 \leqslant \mathrm{R} \leqslant 205) = 0{,}95$.
On peut donc prendre en utilisant la question précédente $\mu-2\sigma = 195$ et $\mu+2\sigma = 205$.
Ceci conduit à $2\sigma = 5$, donc on a $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{2{,}5}$.

B-1. On note D l'évènement « le composant a un défaut ». On obtient l'arbre ci-dessous.



B-2. **Affirmation 1 :** $\mathrm{P_B}\left(\overline{\mathrm{D}}\right) = 0{,}92$, donc réponse **b**
Affirmation 2 : $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) = 0{,}6 \times 0{,}05 = 0{,}03$, donc réponse **c**
Affirmation 3 : $\mathrm{P}(\mathrm{D}) = 0{,}6 \times 0{,}05 + 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}062$, donc réponse **c**
Affirmation 4 : $\mathrm{P_D}(\mathrm{B}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{D})}{\mathrm{P}(\mathrm{D})} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}08}{0{,}062} \approx 0{,}5161$, donc réponse **a**

C-1. Dans le tirage au hasard d'un composant, on prend pour succès l'évènement « il a un défaut ». La probabilité de ce succès est 0,06. Constituer une boîte revient à répéter 150 fois l'expérience dans des conditions d'indépendance. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, donc **X suit la loi binomiale $\boldsymbol{\mathcal{B}}$(150 ; 0,06)**.

C-2. **a.** La probabilité qu'il y ait exactement 18 composants défectueux est $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 18)$.
On l'évalue par `binomFdp(0.023,0.06,18)` ($\approx 0{,}0023$). On a donc $\mathbf{P(X = 18) \approx 0{,}002}$.

b. La probabilité qu'il y ait au moins 16 composants défectueux est $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 16)$.
On a $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 16) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} < 16) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 15)$.
On évalue $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 15)$ par `binomFrép(150,0.06,15)` ($\approx 0{,}9814$). On en déduit $\mathbf{P(X \geqslant 16) \approx 0{,}019}$.

c. Si on comprend la phrase du commercial (« plus de 15 composants défectueux ») au sens strict (c'est-à-dire $\mathrm{P}(\mathrm{X} > 15)$), on a : $\mathrm{P}(\mathrm{X} > 15) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 16) \approx 0{,}019 < 2\,\%$. **Le commercial a donc raison**.

C-3. On sait que si $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(n\,;p)$, on a $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np$. On a donc ici $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 150 \times 0{,}06$, donc $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 9$.
Le nombre moyen de composants défectueux par boîte est de 9.