

# BTS Groupement A2 – Mathématiques

Éléments de correction

Session 2014

## Exercice 1

Toutes spécialités

### Partie A

1. Les bonnes réponses sont :

(a)  $T = 2$

(b)  $b_1 = 0$

(c)  $a_0 = 0,5$

(d)  $a_1 = \frac{4}{\pi^2}$

2. On a

$$\begin{aligned} P_f &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [f(t)]^2 dt \\ &= \int_0^1 [f(t)]^2 dt \quad \text{la fonction } f^2 \text{ est paire} \\ &= \int_0^1 (1-t)^2 dt \\ &= \left[ -\frac{1}{3}(1-t)^3 \right]_0^1 \end{aligned}$$

d'où  $P_f = \frac{1}{3}$

3. Voir tableau 1 du document réponse 1.

On veut que  $S_n \geq 0,999P_f$  c'est-à-dire  $S_n \geq 0,333$ , d'où  $n \geq 3$

### Partie A

1. (a) Par lecture graphique, on a  $h_{\max} \approx 0,975$

(b) Voir courbe 1 en rouge du document réponse 1.

(c) À l'aide de la valeur approchée précédente, on obtient  $F_c \approx 4,55$ .

(a) On lit graphiquement  $\omega \in [0; 184]$

(b) Il faut résoudre l'équation  $G(\omega) = -0,1$  c'est-à-dire

$$\frac{-10}{\ln(10)} \ln \left[ 1 + \left( \frac{\omega}{80\pi} \right)^{12} \right] = -0,1$$

$$\ln \left[ 1 + \left( \frac{\omega}{80\pi} \right)^{12} \right] = 0,01 \ln(10)$$

$$1 + \left( \frac{\omega}{80\pi} \right)^{12} = \exp(0,01 \ln 10)$$

$$\left( \frac{\omega}{80\pi} \right)^{12} = \exp(0,01 \ln 10) - 1$$

$$12 \ln \left( \frac{\omega}{80\pi} \right) = \ln (\exp(0,01 \ln 10) - 1)$$

$$\ln \left( \frac{\omega}{80\pi} \right) = \frac{1}{12} \ln (\exp(0,01 \ln 10) - 1)$$

$$\frac{\omega}{80\pi} = \exp \left[ \frac{1}{12} \ln (\exp(0,01 \ln 10) - 1) \right]$$

$$\omega = 80\pi \exp \left[ \frac{1}{12} \ln (\exp(0,01 \ln 10) - 1) \right]$$

d'où  $\omega_0 \approx 183,7$

**Groupement A2 : Spécialités Électrotechnique, Génie optique****Partie A**

1. On veut calculer

$$\begin{aligned} p(1000) &= \int_0^{1000} 0,0004e^{-0,0004x} dx \\ &= [-e^{-0,0004x}]_0^{1000} \\ &= 1 - e^{-0,4} \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $p(1000) \approx 0,33$

2. (a) On a  $p(C_1 \cap C_2) = p(C_1) \times p_{C_1}(C_2)$  sachant que  $p(C_1) = 0,67$  et  $p(C_1 \cap C_2) = 0,4489$  d'où  $p_{C_1}(C_2) = 0,67$ .

On en tire alors  $p_{C_1}(\overline{C_2}) = 1 - p_{C_1}(C_2)$  c'est-à-dire  $p_{C_1}(\overline{C_2}) = 0,33$

$p(\overline{C_1}) = 1 - p(C_1)$  d'où  $p(\overline{C_1}) = 0,33$ .

On en déduit  $p(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}) = p(\overline{C_1}) \times p_{\overline{C_1}}(\overline{C_2}) = 0,33 \times 0,33$  c'est-à-dire  $p(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}) = 0,1089$

Enfin, comme  $p_{\overline{C_1}}(\overline{C_2}) = 0,33$ , on a  $p_{\overline{C_1}}(C_2) = 0,67$  D'où  $p(\overline{C_1} \cap C_2) = p(\overline{C_1}) \times p_{\overline{C_1}}(C_2)$  c'est-à-dire  $p(\overline{C_1} \cap C_2) = 0,2211$

(b) On a  $C_2 = (C_1 \cap C_2) \cup (\overline{C_1} \cap C_2)$ , d'où, d'après la question précédente et sachant que les événements  $(C_1 \cap C_2)$  et  $(\overline{C_1} \cap C_2)$  sont disjoints, on obtient

$$p(C_2) = 0,67$$

(c) On a  $p(C_1 \cap C_2) = 0,4489$  et  $p(C_1) \times p(C_2) = 0,67^2 = 0,4489$ , c'est-à-dire  $p(C_1 \cap C_2) = p(C_1) \times p(C_2)$  donc les événements  $C_1$  et  $C_2$

(d) Le dispositif ne fonctionne pas quand les deux composants sont défectueux, c'est-à-dire que la probabilité de cet événement est  $p(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}) = 0,1089$ . Ici, on veut qu'il soit en état de fonctionnement, donc on cherche la probabilité de l'événement contraire.

La probabilité que ce dispositif soit en état de fonctionnement au bout de 1 000 heures est 0,8911.

**Partie B**

1.  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 50$ , de probabilité  $p = 0,67$

2. On demande  $p(X = 42)$  d'où  $p(X = 42) = \binom{50}{42} 0,67^{42} \times 0,33^8$ , c'est-à-dire  $p(X = 42) \approx 0,003742$

3. On demande  $p(X > 42) = 1 - p(X \leq 42) \approx 1 - 0,99797363$  c'est-à-dire  $p(X > 42) \approx 0,002$

4. (a) On obtient par lecture graphique  $k_1 = 27$ ,  $k_2 = 40$

(b) On a alors  $p(27 \leq X \leq 40) > 0,975 - 0,025$  d'où  $p(27 \leq X \leq 40) > 0,95$

Par conséquent, l'affirmation proposée est vraie.

**Partie C**

1. Par approximation d'une loi binomiale par une loi normale, on conserve l'espérance et l'écart-type de la loi binomiale.

Par conséquent, on a  $\mu = np = 0,67 \times 50$  c'est-à-dire  $\mu = 33,5$  et  $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \times 0,67 \times 0,33}$  c'est-à-dire  $\sigma \approx 3,3$

2. La Variable  $Y$  suit la loi normale de paramètres  $\mu = 33,5$  et  $\sigma = 3,3$  alors la variable  $T = \frac{Y - \mu}{\sigma}$  suit la loi normale centrée réduite.

On a alors

$$\begin{aligned} p(Y \leq 42) &= p\left(T \leq \frac{42 - 33,5}{3,3}\right) \\ &= p(T \leq 2,575) \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $p(Y \leq 42) \approx 0,99$

3. On a donc

$$\begin{aligned} p(33,5 - a \leq Y \leq 33,5 + a) &= p\left(\frac{33,5 - a - 33,5}{3,3} \leq T \leq \frac{33,5 + a - 33,5}{3,3}\right) \\ &= p\left(-\frac{a}{3,3} \leq T \leq \frac{a}{3,3}\right) \\ &= \Pi\left(\frac{a}{3,3}\right) - \Pi\left(-\frac{a}{3,3}\right) \\ &= 2\Pi\left(\frac{a}{3,3}\right) - 1 \end{aligned}$$

Il nous faut alors résoudre  $2\Pi\left(\frac{a}{3,3}\right) - 1 \geq 0,95$  c'est-à-dire  $\Pi\left(\frac{a}{3,3}\right) \geq 0,975$ .

Or par lecture de la table, on a  $\Pi(1,96) = 0,975$  d'où  $a = 3,3 \times 1,96$ , c'est-à-dire  $a \approx 6,5$

On retrouve  $p(27 \leq Y \leq 40) \geq 0,95$ .

**Document réponse 1 à rendre avec la copie,  
Toutes spécialités**

$n$	1	2	3	4	5	6
$a_n^2$	0,1643	0	0,0020	0	0,0003	0
$S_n$	0,3321	0,3321	0,3331	0,3331	0,3333	0,3333

TABLE 1 – Puissances des harmoniques

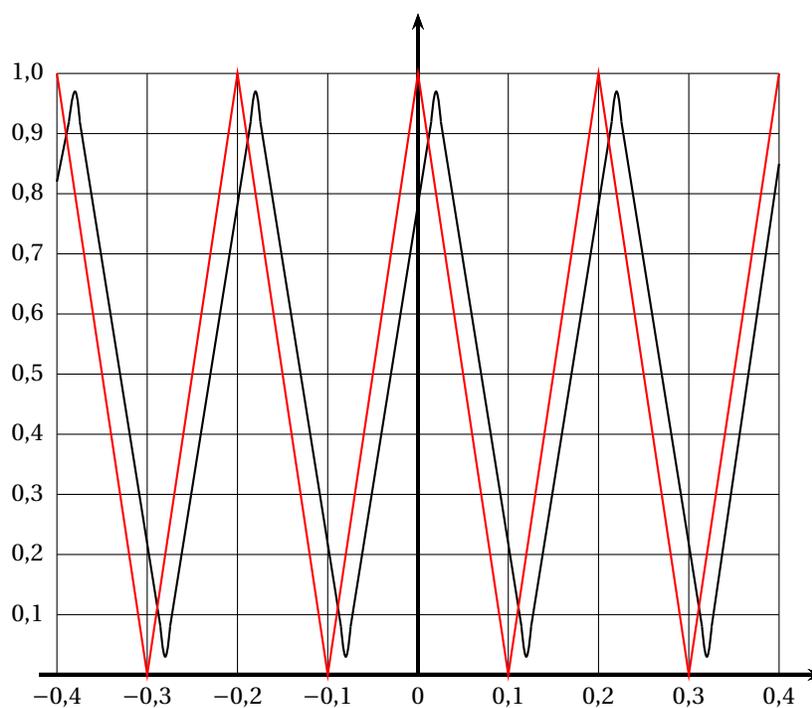


FIGURE 1 – La fonction  $h$

**Document réponse 2 à rendre avec la copie,  
spécialités Électrotechnique, Génie optique**

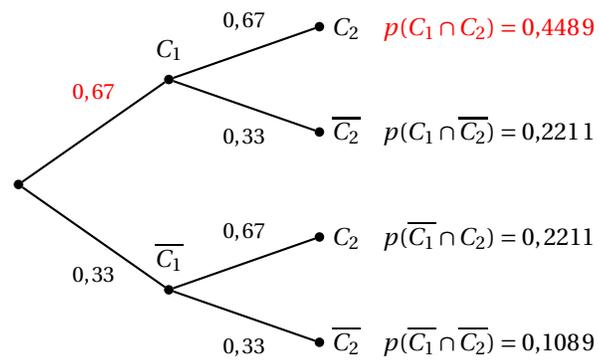


FIGURE 2 – Arbre pondéré

Suggestions ou remarques : [xavier.tisserand@ac-poitiers.fr](mailto:xavier.tisserand@ac-poitiers.fr)