

BTS groupement A 2012

corrigé

Exercice 1

Partie A

1. X suit la loi $\mathcal{N}(15; 0,35)$ donc $X_0 = \frac{X-15}{0,35}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

a. On demande $p(14,3 \leq X \leq 15,5) = p\left(-\frac{0,7}{0,35} \leq X_0 \leq \frac{0,5}{0,35}\right) = p(-2 \leq X_0 \leq 1,43)$. Ceci est égal à $\varphi(1,43) + \varphi(2) - 1$ où φ désigne la fonction donnant les valeurs de la table du formulaire. Ainsi : $p(14,3 \leq X \leq 15,5) = 0,9772 + 0,9236 - 1 = 0,9008$. Conclusion :

$$p(\text{conforme}) = 0,90.$$

b. On résoud :

$$\begin{aligned} p(15-h \leq X \leq 15+h) = 0,95 &\Leftrightarrow p\left(\frac{-h}{0,35} \leq X_0 \leq \frac{h}{0,35}\right) = 0,95 \\ &\Leftrightarrow 2\varphi\left(\frac{h}{0,35}\right) - 1 = 0,95 \\ &\Leftrightarrow \varphi\left(\frac{h}{0,35}\right) = 0,975 \\ &\Leftrightarrow \frac{h}{0,35} = 1,96 \\ &\Leftrightarrow h = 0,686 \end{aligned}$$

À 10^{-2} près, cela donne $\boxed{h = 0,69}$.

c. X a 95% de chances d'être dans l'intervalle $[14,31; 15,69]$.

2. On prend cette fois-ci $X_0 = \frac{X-14,9}{0,35}$ et on demande

$$\begin{aligned} p(14,3 \leq X \leq 15,5) = 0,9 &\Leftrightarrow p\left(\frac{-0,6}{\sigma} \leq X_0 \leq \frac{0,6}{\sigma}\right) = 0,90 \\ &\Leftrightarrow 2\varphi\left(\frac{0,6}{\sigma}\right) - 1 = 0,90 \\ &\Leftrightarrow \varphi\left(\frac{0,6}{\sigma}\right) = 0,95 \\ &\Leftrightarrow \frac{0,6}{\sigma} \approx 1,645^* \\ &\Leftrightarrow \sigma \approx 0,364742 \end{aligned}$$

À 10^{-2} près, j'ai donc $\boxed{\sigma = 0,07}$.

Remarque * : j'ai pris la moyenne entre 1,64 et 1,65.

Partie B

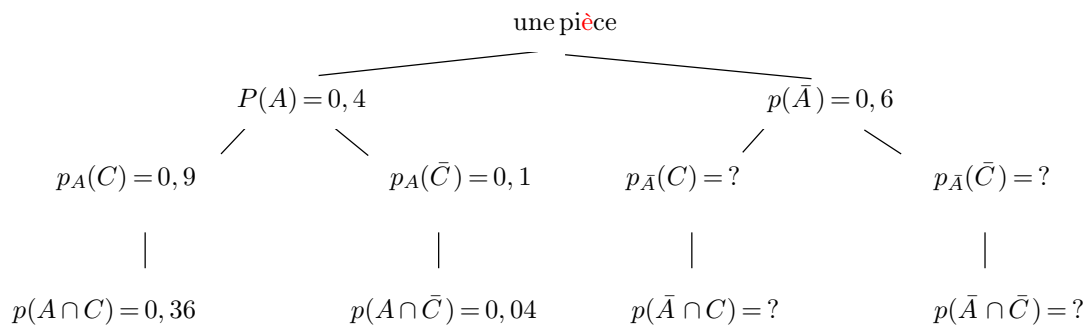
1. On tire un nombre de pièces fixées à l'avance, et la probabilité d'avoir une pièce conforme est considérée comme étant la même pour chaque pièce tirée, donc Y suit une loi binomiale. Les paramètres sont $\mathcal{B}(50, 10\%)$.

2. On demande $p(Y=2) = \binom{50}{2} 0,9^{48} 0,1^2 = 0,078$ d'où $\boxed{0,08}$ à 10^{-2} près.
3. a) Le paramètre de la Poisson qui approche binomiale est l'espérance de cette dernière, c'est-à-dire qu'on peut approcher $\mathcal{B}(n, p)$ par $\mathcal{P}(np)$ (pourvu que n soit assez grand et p assez petit). Donc ici c'est bien $\mathcal{P}(50 \times 0,10 = 5)$ qui va nous servir d'approximation.
- b) on demande $p(Y \leq 2) = 0,007 + 0,034 + 0,084 = 0,125 = 12,5\%$. Donc avec l'approximation demandée par l'énoncé : $\boxed{p(Y \leq 2) \approx 0,13}$.

Remarque 1. On peut, par curiosité, regarder combien Poisson donne pour $p(Y=2)$: la table donne 0,084 ce qui est effectivement proche du 0,08 que nous avons trouvé.

Partie C

On résume la situation à l'aide d'un arbre :



1. On nous demande $p(M_1 \cap \bar{C}) = 0,1 \times 0,4 = 0,04$ obtenu en multipliant le long des branches de l'arbre, ce qui revient à utiliser la formule $p(M_1 \cap \bar{C}) = p(M_1) \times p_{M_1}(\bar{C})$.

2.

	C	$\bar{C}$	
A	$p(C \cap A) = 0,36$	$p(\bar{C} \cap A) = 0,04$	$p(A) = 0,4$
$\bar{A}$	$p(C \cap \bar{A}) = 0,58$	$p(\bar{C} \cap \bar{A}) = 0,02$	$p(\bar{A}) = 0,6$
	$p(C) = 0,94$	$p(\bar{C}) = 0,06$	total = 1

3. On demande $p_C(A) = \frac{p(C \cap A)}{p(C)} = \frac{0,36}{0,94} = 0,38$.
4. $p(A) \times p(C) = 0,4 \times 0,94 = 0,376$
 $p(A \cap C) = 0,36$ donc les événements ne sont pas indépendants : le fait d'utiliser telle ou telle machine influe sur la conformité des pièces.

Exercice 2

Partie A

1. a) représentation de $e(t)$:

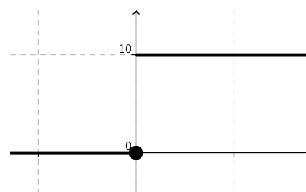


Figure 1. a fonction $e(t) = 10\mathcal{U}(t)$

b) Laplace de $e(t)$: $E(p) = \frac{10}{p}$.

2. Si $v(t)\mathcal{U}(t)$ a pour Laplace $V(p)$, alors $v'(t)\mathcal{U}(t)$ a pour Laplace $p V(p) - v(0^+)$. Donc l'équation différentielle a pour transformée :

$$RC(pV(p) - v(0^+)) + V(p) = \frac{10}{p} \Leftrightarrow V(p)(RCp + 1) = \frac{10}{p} + RCv(0^+)$$

On suppose que $v(0^+)$, l'énoncé assimilant $v(0) = 0$ et $v(0^+) = 0 \dots$ donc on arrive à la formule demandée.

3. a) décomposition en éléments simples : l'énoncé vous donne la réponse, il suffit de vérifier.

$$\begin{aligned} \frac{10}{p} - \frac{10}{p + \frac{1}{RC}} &= 10 \frac{p + \frac{1}{RC} - p}{p(p + \frac{1}{RC})} \\ &= 10 \frac{\frac{1}{RC}}{p(p + \frac{1}{RC})} \\ &\quad \text{on multiplie par } RC \text{ en haut et en bas :} \\ &= \frac{10}{p(pRC + 1)} \end{aligned}$$

b) On doit trouver le Laplace inverse de $p \rightarrow \frac{10}{p} - \frac{10}{p + \frac{1}{RC}}$. On applique les formules des décalages :

- $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{10}{p}\right) = 10\mathcal{U}(t)$
- $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{10}{p + \frac{1}{RC}}\right) = 10e^{-\frac{t}{RC}}\mathcal{U}(t).$

D'où : $v(t) = 10\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\mathcal{U}(t)$. On vérifie que $v(0^+) = 10 \times (1 - 1) = 0$. La limite $v(+\infty)$ vaut $10\mathcal{U}(t)$ ce qui veut dire que le système se stabilise.

Partie B

1. On divise par R en haut et en bas :

$$T(\omega) = \frac{\frac{1}{jRC\omega}}{1 + \frac{1}{jRC\omega}} = \frac{\frac{\omega_0}{j\omega}}{1 + \frac{\omega_0}{j\omega}}$$

On multiplie par $\frac{j\omega}{\omega_0}$:

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}.$$

2. $T(\omega_0) = \frac{1}{1+j} = \frac{1-j}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$ module $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et argument $-\frac{\pi}{4}$.

3. a) $|T(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$ et b) $\arg(T(\omega)) = -\arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right).$

4. Question intéressante : on ne pense jamais assez à vérifier la concordance des résultats. Les formules du 3) nous donneraient $|T(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce que nous avons trouvé (en effet, $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ce qu'un simple produit en croix montre), et $\arg(T(\omega_0)) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$.

5. $G_{db}(\omega_0) = \frac{20}{\ln(10)} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{20}{\ln(10)} \times \left(-\frac{1}{2} \ln(2)\right) = -10 \frac{\ln(2)}{\ln(10)} = -3.$

6. Une remarque avant de commencer :

Remarque 2. On peut remarquer que $G_{db}(\omega) = \frac{-10}{\ln(10)} \ln\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$. Le gain est donc toujours négatif puisque $1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 > 1$, ce que le graphique confirme.

a) $\varphi(\omega_0) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$ donc b) $M_0\left(-\frac{\pi}{4} \approx -0,785, -3\right)$ on retrouve graphiquement l'ordonnée -3 .

7. Je désigne par $x(A)$ l'abscisse d'un point A . J' peux alors écrire : $x(M_1) < x(M_0)$ ce qui signifie $\varphi(\omega_1) < \varphi(\omega_0)$ donc $\omega_1 > \omega_0$ d'où $\omega_1 > 500$.

graphique de M_0 :

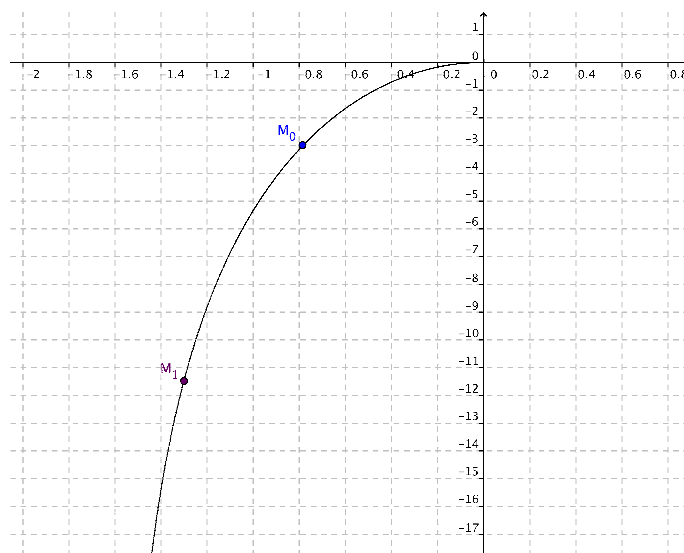


Figure 2.