BTS ELECTROTECHNIQUE
MATHEMATIQUES Session 2010
CORRECTION

Exercice 1 : (10 points)

PARTIE A :

1) Voir document réponse n°1 (représentation graphique de h).

2) a) $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t).dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) - g(t).dt$

$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t).dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t).dt = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} 1.dt - \left(\int_0^{\tau} 0.dt + \int_{\tau}^{2\pi} 1.dt\right)\right]$

$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi}\left[[t]_0^{2\pi} - \left(0 + [t]_{\tau}^{2\pi}\right)\right] = \frac{1}{2\pi}\left[(2\pi - 0) - (2\pi - \tau)\right]$

$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi}(2\pi - 2\pi + \tau) \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{\tau}{2\pi}}$

b) $\int_0^{\tau} \cos(nt).dt = \left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{\tau} = \frac{1}{n}(\sin(n\tau) - \sin(0))$

$\Rightarrow \int_0^{\tau} \cos(nt).dt = \frac{1}{n}(\sin(n\tau) - 0)$

$$\boxed{\Rightarrow \int_0^{\tau} \cos(nt).dt = \frac{\sin(n\tau)}{n}}$$

$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\cos(n\omega t).dt$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt).dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\cos(nt).dt$

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nt).dt - \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\tau} 0.dt + \int_{\tau}^{2\pi} \cos(nt).dt\right)$

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\left[\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{2\pi} - \left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_{\tau}^{2\pi}\right]$

$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{m\pi}\left(\left(\sin(2\pi m) - \sin(0)\right) - \left(\sin(2\pi m) - \sin(m\tau)\right)\right)$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{m\pi}\left(\cancel{\sin(2\pi m)} - 0 - \cancel{\sin(2\pi m)} + \sin(m\tau)\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow a_m = \frac{1}{m\pi}\left(\sin(m\tau)\right)}$$

c) $b_m = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\sin(m\omega t).dt$ avec $\omega = 1$

$$\Rightarrow b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(t) - g(t)\right)\sin(mt).dt$$

$$\Rightarrow b_m = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t)\sin(mt).dt - \int_0^{2\pi} g(t)\sin(mt).dt\right)$$

$$\Rightarrow b_m = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\sin(mt).dt - \left(\int_0^{\tau} 0.dt + \int_{\tau}^{2\pi}\sin(mt).dt\right)\right)$$

$$\Rightarrow b_m = \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{m}\cos(mt)\right]_0^{2\pi} - \left[-\frac{1}{m}\cos(mt)\right]_{\tau}^{2\pi}\right)$$

$$\Rightarrow b_m = \frac{1}{m\pi}\left(\left(-\cos(2\pi m) + \cos(0)\right) - \left(-\cos(2\pi m) + \cos(m\tau)\right)\right)$$

$$\Rightarrow b_m = \frac{1}{m\pi}\left(\cancel{\cos(2\pi m)} - \cancel{\cos(2\pi m)} + 1 + \left(-\cos(m\tau)\right)\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow b_m = \frac{1}{m\pi}\left(1 - \cos(m\tau)\right)}$$

3) * calculons tout d'abord b_m^2 : $\boxed{b_m^2 = \frac{1}{(m\pi)^2}\left(1 - \cos(m\tau)\right)^2}$

* calculons ensuite a_m^2 : $a_m^2 = \frac{1}{(m\pi)^2}\left(\sin(m\tau)\right)^2$

or d'après le formulaire on a : $2\cos^2(m\tau) - 1 = 1 - 2\sin^2(m\tau)$

$$\Rightarrow \sin^2(m\tau) = -\cos^2(m\tau) + 1$$

on obtient donc : $\boxed{a_m^2 = \frac{-1}{(m\pi)^2}\left(\left(\cos(m\tau)\right)^2 - 1\right)}$

* On peut maintenant calculer $a_m^2 + b_m^2$:

$$a_m^2 + b_m^2 = \frac{1}{(m\pi)^2}\left(1-\cos(m\tau)\right)^2 + \frac{(-1)}{(m\pi)^2}\left(\left(\cos(m\tau)\right)^2 - 1\right)$$

$$\Rightarrow a_m^2 + b_m^2 = \frac{1}{(m\pi)^2}\left(1 - 2\cos(m\tau) + \cancel{(\cos(m\tau))^2} - \cancel{(\cos(m\tau))^2} + 1\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow a_m^2 + b_m^2 = \frac{1}{(m\pi)^2}\left(2 - 2\cos(m\tau)\right)}$$

Finalement calculons A_m :

$$A_m = \sqrt{\frac{a_m^2 + b_m^2}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{(m\pi)^2}\left(2-2\cos(m\tau)\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1}{(m\pi)^2}\left(\frac{2-2\cos(m\tau)}{2}\right)}$$

$$\boxed{\Rightarrow A_m = \frac{1}{m\pi}\sqrt{1 - \cos(m\tau)}}$$

Dans toute la suite de l'exercice, $\tau = \frac{\pi}{4}$:

4) Voir tableau 1 du document réponse n°2

5) a) $h^2_{eff} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[h(t)]^2.dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(t)-g(t))^2.dt$

$$\Rightarrow h^2_{eff} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2 - 2f(t).g(t) + g(t)^2$$

$$\Rightarrow h^2_{eff} = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}1.dt - 2\left(\int_0^{\tau}0.dt + \int_{\tau}^{2\pi}1.dt\right) + \int_0^{\tau}0.dt + \int_{\tau}^{2\pi}1.dt\right)$$

$$\Rightarrow h^2_{eff} = \frac{1}{2\pi}\left([t]_0^{2\pi} - 2[t]_{\tau}^{2\pi} + [t]_{\tau}^{2\pi}\right)$$

$$\Rightarrow h^2_{eff} = \frac{1}{2\pi}\left((2\pi - 0) - 2(2\pi - \tau) + (2\pi - \tau)\right)$$

$$\Rightarrow h^2_{eff} = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi - 4\pi + 2\tau + 2\pi - \tau\right)$$

$$\Rightarrow h^2_{eff} = \frac{1}{2\pi}\left(4\pi - 4\pi + \tau\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow h^2_{eff} = \frac{\tau}{2\pi}}$$ on remarque que $\frac{\tau}{2\pi} = a_0$

donc pour $\tau = \frac{\pi}{4}$ on a $\boxed{h^2_{eff} = \frac{1}{8}}$

b)- $P = \sum_{n=0}^{3} A_n^2 = 0{,}12500^2 + 0{,}17227^2 + 0{,}15915^2 + 0{,}13863^2$

$\Rightarrow \boxed{P = 0{,}0898}$ à 10^{-4} près

c)- $\frac{P}{h^2_{eff}} = \left(\frac{1/8}{0{,}0898}\right)^{-1} \Rightarrow \boxed{\frac{P}{h^2_{eff}} = 0{,}72}$

PARTIE B

1) $r(\omega) = |H(j\omega)| = \left|\frac{3}{3 + j2\omega}\right| = \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{3^2 + (2\omega)^2}}$

$$\boxed{\Rightarrow r(\omega) = \frac{3}{\sqrt{9 + 4\omega^2}}}$$

2) $B_n = r(n) \times A_n = \frac{3}{\sqrt{9 + 4n^2}} \times A_n$

$\longrightarrow$ Voir tableau 2 du document réponse n°2

3) $\longrightarrow$ Voir figure 5 du document réponse n°2

4) a)- $Q = \sum_{n=0}^{3} B_n^2 = 0,12500^2 + 0,14334^2 + 0,09549^2 + 0,06200^2$

$\Rightarrow \boxed{Q = 0,0491}$ à 10^{-4} près

b) $\frac{Q}{K^2_{eff}} = \frac{0,0491}{0,0516} \Rightarrow \boxed{\frac{Q}{K^2_{eff}} = 0,95}$ à 10^{-2} près

Exercice n°2 : (10 points).

PARTIE A :

1/ Une solution particulière de l'équation différentielle (2) est la solution lorsqu'on est en régime permanent. Dans ce cas, on a $h''(t) = 0$

Donc en régime permanent, l'équation différentielle peut s'écrire de la façon suivante : $4h(t) = 20$

on obtient donc $h(t) = \frac{20}{4} \Rightarrow \boxed{h(t) = 5}$

2/ Pour cela, il faut tout d'abord déterminer la solution $h_2(t)$ de l'équation différentielle sans second membre (soit en régime transitoire) $y''(t) + 4y(t) = 0$

Son équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$

Son discriminant est : $\Delta = b^2 - 4ac = -4 \times 4 = -16$

Les racines complexes conjuguées sont :

$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2 \times a} = i\frac{\sqrt{16}}{2} \Rightarrow r_1 = 2i$

$r_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2 \times a} = -i\frac{\sqrt{16}}{2} \Rightarrow r_2 = -2i$

Soit $\boxed{h_2(t) = [\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)]}$ car $e^{\alpha t} = e^0 = 1$

La solution générale est donc $f(t) = h(t) + h_2(t)$, soit :

$$\boxed{f(t) = [\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)] + 5}$$

3) Pour cela, déterminons la dérivée de $f(t)$:

$$\boxed{f'(t) = -2\lambda \sin(2t) + 2\mu \cos(2t)}$$

$f(0) = 0$ donc : $\lambda \cos(0) + \mu \sin(0) + 5 = 0 \Leftrightarrow (\lambda \times 1) + (\mu \times 0) = -5$

$\Rightarrow \lambda = -5$

$f'(0) = 0$ donc : $-2\lambda \sin(0) + 2\mu \cos(0) = 0 \Leftrightarrow (-2\lambda \times 0) + (2\mu \times 1) = 0$

$\Rightarrow \mu = 0$

Donc la fonction f solution de l'équation différentielle (2) qui vérifie les conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ est :

$$\boxed{f(t) = -5\cos(2t) + 5}$$

PARTIE B :

1) $E(p) = \mathcal{L}[e(t)] = \mathcal{L}[8t\,U(t) - 8(t-\tau)U(t-\tau)]$

$\Rightarrow E(p) = \mathcal{L}[8t\,U(t)] - \mathcal{L}[8(t-\tau)\,U(t-\tau)]$

$\Rightarrow E(p) = 8\,\mathcal{L}[t\,U(t)] - 8\,\mathcal{L}[(t-\tau)\,U(t-\tau)]$

$\Rightarrow E(p) = 8 \times \dfrac{1}{p^2} - 8 \times \dfrac{1}{p^2} e^{-\tau p}$

$$\boxed{\Rightarrow E(p) = \frac{8}{p^2} - \frac{8}{p^2} e^{-\tau p}}$$

2/ $\mathcal{L}[e(t)] = \mathcal{L}[g''(t) + 4g(t)] = \mathcal{L}[g''(t)] + 4\mathcal{L}[g(t)]$

$\Rightarrow E(p) = \mathcal{L}[g''(t)] + 4\mathcal{L}[g(t)]$

$\Rightarrow \frac{8}{p^2} - \frac{8}{p^2}e^{-\tau p} = p^2 G(p) - p\,g(0^+) - g'(0^+) + 4G(p)$

$\Rightarrow G(p)(p^2+4) = \frac{8}{p^2}(1 - e^{-\tau p})$ car $g(0^+)=0$ et $g'(0^+)=0$

$$\boxed{\Rightarrow G(p) = \frac{8}{p^2(p^2+4)}(1-e^{-\tau p})}$$

3/ $\frac{8}{p^2(p^2+4)} = \frac{A(p^2+4)+Bp^2}{p^2(p^2+4)} = \frac{Ap^2+4A+Bp^2}{p^2(p^2+4)}$

$\Rightarrow \frac{8}{p^2(p^2+4)} = \frac{(A+B)p^2+4A}{p^2(p^2+4)}$

on obtient donc :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 4A=8 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \end{cases}$$

Finalement, on a : $\boxed{\frac{8}{p^2(p^2+4)} = \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p^2+4}}$

4/ $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8}{p^2(p^2+4)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{p^2} - \frac{2}{p^2+4}\right]$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8}{p^2(p^2+4)}\right] = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{p^2+2^2}\right]$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8}{p^2(p^2+4)}\right] = 2t\,U(t) - \sin(2t)\,U(t)$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8}{p^2(p^2+4)}\right] = (2t - \sin(2t))\,U(t)}$$

5) $\mathcal{L}^{-1}[G(p)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8}{p^2(p^2+4)}\left(1-e^{-\tau p}\right)\right]$

$$\Rightarrow g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8}{p^2(p^2+4)} - \frac{8}{p^2(p^2+4)}e^{-\tau p}\right]$$

$$\Rightarrow g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8}{p^2(p^2+4)}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8}{p^2(p^2+4)}e^{-\tau p}\right]$$

$$\Rightarrow g(t) = (2t - \sin(2t))\,U(t) - (2(t-\tau) - \sin(2(t-\tau)))\,U(t-\tau)$$

$\Rightarrow g(t) = g_0(t) - g_0(t-\tau)$ avec $g_0(t) = (2t - \sin(2t))\,U(t)$
et avec $g_0(t-\tau) = (2(t-\tau) - \sin(2(t-\tau)))\,U(t-\tau)$

6) pour $t \geq \tau$ on a $U(t) = 1$ et $U(t-\tau) = 1$

donc $g(t) = (2t - \sin(2t)) - (2(t-\tau) - \sin(2(t-\tau)))$

$$\Rightarrow g(t) = (2t - \sin(2t)) - (2t - 2\tau - \sin(2t-2\tau))$$

$$\Rightarrow g(t) = (\cancel{2t} - \sin(2t) - \cancel{2t} + 2\tau + \sin(2t-2\tau))$$

$$\Rightarrow \boxed{g(t) = 2\tau - \sin(2t) + \sin(2t-2\tau)}$$

7) a)- pour $\tau = \pi$: $g(t) = 2\pi - \sin(2t) + \sin(2t - 2\pi)$

or on sait que $\sin(2t-2\pi) = \sin(2t)$

$$\Rightarrow g(t) = 2\pi - \cancel{\sin(2t)} + \cancel{\sin(2t)} \Rightarrow \boxed{g(t) = 2\pi}$$

b)- Voir document réponse n°3

Figure 1 : courbe représentative de la fonction f

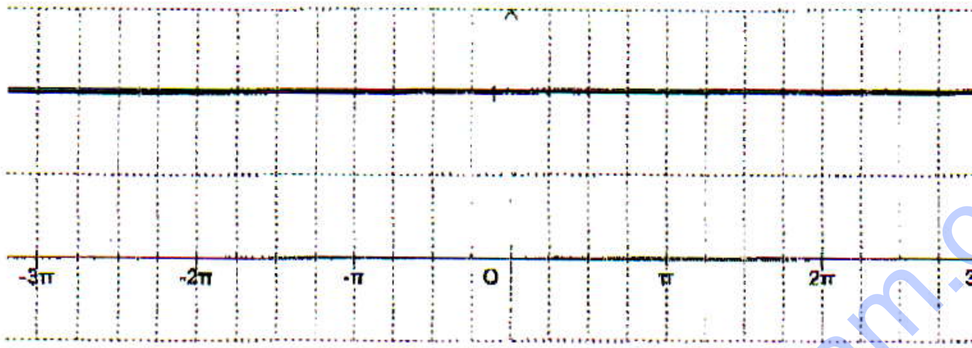


Figure 2 : courbe représentative de la fonction g

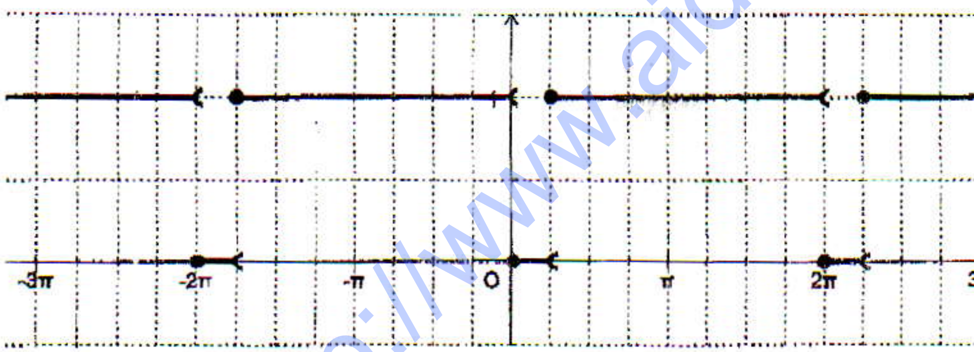
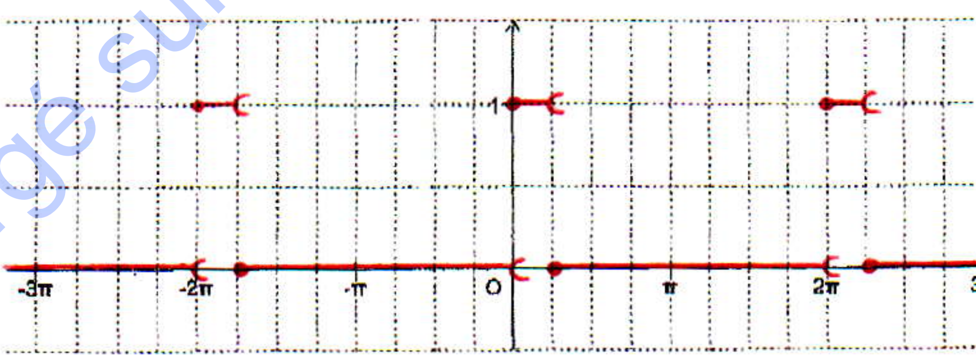


Figure 3 : courbe représentative de la fonction h



Document réponse n°2, à rendre avec la copie (exercice 1)

Tableau 1

n	0	1	2	3	4	5	6	7
A_n	0,12500	0,17227	0,15915	0,13863	0,11254	0,08318	0,05305	0,02461

n	8	9	10	11	12	13	14	15
A_n	0	0,01914	0,03183	0,03781	0,03751	0,03199	0,02274	0,01148

Tableau 2

n	0	1	2	3	4	5	6	7
B_n	0,12500	0,14334	0,09549	0,06200	0,03952	0,02390	0,01287	0,00516

n	8	9	10	11	12	13	14	15
B_n	0,00000	0,00315	0,00472	0,00511	0,00465	0,00367	0,00242	0,00114

Figure 4

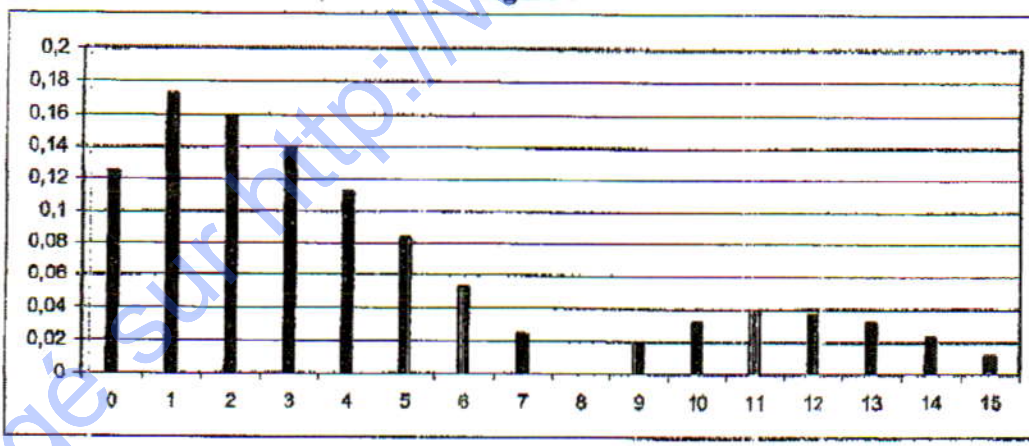
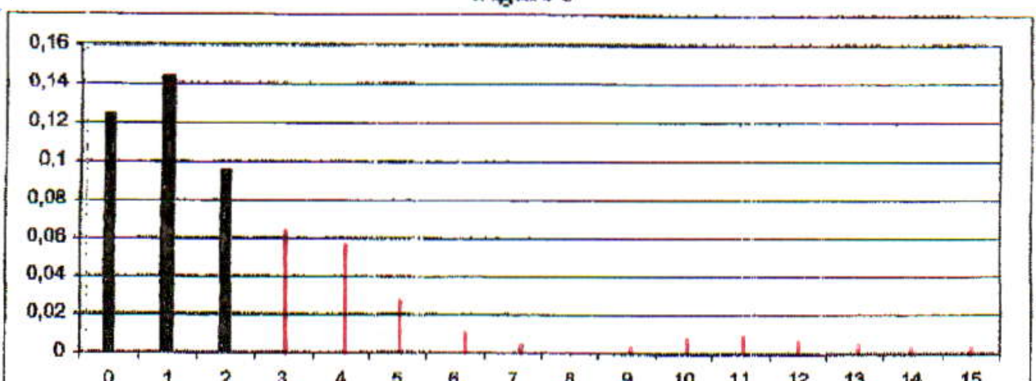


Figure 5



MATGRA1

Document réponse n°3, à rendre avec la copie (exercice 2)