BTS SE 2001, corrigé, par Elodouwen

EXERCICE 1
PARTIE A

1) Solution particulière: $h(t)=10-\beta$ donc $h'(t)=0$ donc $\dfrac{h'(t)}{2}+h(t)=10-\beta$ donc h est solution de (E_1).

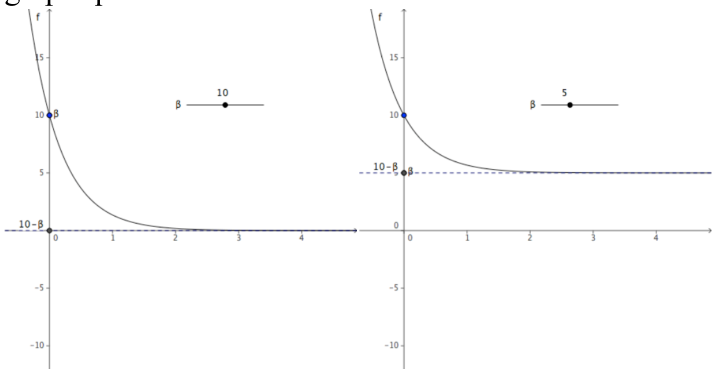
2) Solution homogène: $\dfrac{y'}{2}+y=0 \Leftrightarrow y(x)=\lambda e^{-2x}, \lambda\in\mathbb{R}$

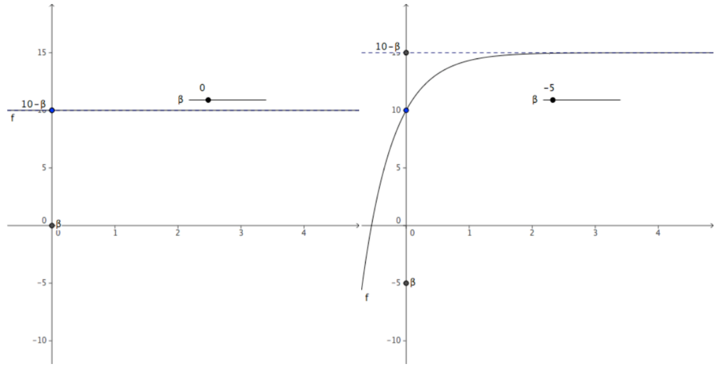
Solution générale: $\boxed{y(x)=\lambda e^{-2x}+10-\beta}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

3) Solution particulière avec condition initiale:
$y(0)=10 \Leftrightarrow \lambda+10-\beta=10 \Leftrightarrow \lambda=\beta$ d'où $y(x)=\beta e^{-2x}+10-\beta$.

On simplifie: $\boxed{y(x)=\beta\left(e^{-2x}-1\right)+10}$

graphique:





4) $f_\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\beta\left(e^{-2x}-1\right)+10\right)=-\beta+10$

PARTIE B

1) On va appliquer la formule selon laquelle

$\int_0^t f(u)U(u)\,du \longrightarrow \dfrac{F(p)}{p}$ par Laplace. Ici nous avons:

$f(u)=10U(u)-g(u) \longrightarrow F(p)=\dfrac{10}{p}-G(p)$. Donc:

$\int_0^t\left[10U(u)-g(u)\right]du \longrightarrow \dfrac{10}{p^2}-\dfrac{G(p)}{p}$, donc:

$i(t) \longrightarrow \dfrac{130}{p^2}-\dfrac{13G(p)}{p}$ en multipliant par 13.

2) L'équa diff $\dfrac{1}{2}g'+g=13\int_0^t\left[10U(u)-g(u)\right]du+(10-\beta)U(t)$

se transforme par Laplace en:

$$\frac{1}{2}\left(pG(p)-g\left(0^+\right)\right)+G(p)=\frac{130}{p^2}-\frac{13G(p)}{p}+\frac{10-\beta}{p}$$

On rassemble les G(p) à gauche:

$$\left(\frac{p}{2}+1+\frac{13}{p}\right)G(p)=\frac{130}{p^2}+\frac{10-\beta}{p}+\frac{1}{2}g\left(0^+\right)$$

$$G(p)=\frac{\frac{130}{p^2}+\frac{10-\beta}{p}+5}{\frac{p}{2}+1+\frac{13}{p}} \quad \text{car } g\left(0^+\right)=10.$$

On multiplie par $2p^2$ en haut et en bas:

$$G(p)=\frac{260+(20-2\beta)p+10p^2}{p\left(p^2+2p+26\right)}$$

3) Maintenant pour trouver ce que demande l'énoncé, on peut soit connaître la technique des éléments simples, et le calcul est long… soit partir, tout simplement, de ce que l'énoncé donne:

Simplifions $\frac{10}{p}-\frac{2\beta}{(p+1)^2+5^2}$, on trouve $\frac{10}{p}-\frac{2\beta}{p^2+2p+26}$, puis l'on met au même dénominateur:

$$\frac{10}{p}-\frac{2\beta}{p^2+2p+26}=\frac{10p^2+20p+260-2p\beta}{p\left(p^2+2p+26\right)}, \text{ cqfd.}$$

4) $g_\infty=\lim\limits_{p\to 0^+} pG(p)=\lim\limits_{p\to 0^+}\left(10-\frac{2p\beta}{(p+1)^2+5^2}\right)=10$, en effet:

$$\lim_{p\to 0^+}\left(\frac{p}{(p+1)^2+5^2}\right)=0.$$

5) La transformée de $t\to e^{-t}\sin(5t)U(t)$:

$$\sin(5t)U(t)\longrightarrow\frac{5}{p^2+25} \quad \text{donc} \quad e^{-t}\sin(5t)U(t)\longrightarrow\frac{5}{(p+1)^2+25}$$

Par un simple produit en croix on trouve maintenant:

$$\frac{2\beta}{5}e^{-t}\sin(5t)U(t)\longrightarrow\frac{2\beta}{(p+1)^2+25} \quad \text{d'où:}$$

$$10U(t)-\frac{2\beta}{5}e^{-t}\sin(5t)U(t)\longrightarrow\frac{10}{p}-\frac{2\beta}{(p+1)^2+25}$$

D'où $\underline{g(t)=10U(t)-\frac{2\beta}{5}e^{-t}\sin(5t)U(t)}$

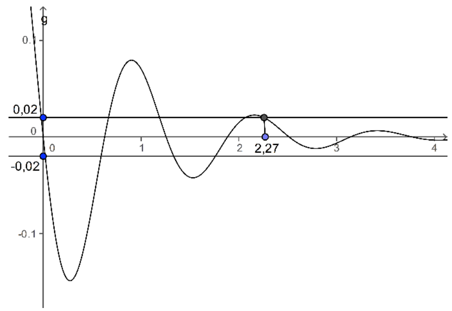
PARTIE C

g correspond à la fonction étudiée précédemment

1a) $\frac{f(t)-f_\infty}{f_\infty}=\frac{5e^{-2t}}{5}=e^{-2t}$

1b) on veut donc $e^{-2t_1}=0,02 \Leftrightarrow -2t_1=\ln 0,02 \Leftrightarrow t_1=-\frac{\ln 0,02}{2}\approx 1,96$

2) $g(t)=10-2e^{-t}\sin(5t)$ et $\frac{g(t)-g_\infty}{g_\infty}=\frac{-2e^{-t}\sin(5t)}{10}$



On trouve $t_2\approx 2,27$

EXERCICE 2

$j^2=-1$, c'est l'unité imaginaire, notée habituellement i.

ω doit sûrement être un réel positif, ce n'est pas précisé par l'énoncé.

1)a) Ici, $T(\omega)=\dfrac{-j\omega k}{1-j\dfrac{\omega}{2}}$ donc $|T(\omega)|=\dfrac{|-j\omega k|}{\left|1-j\dfrac{\omega}{2}\right|}=\dfrac{\omega k}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{2}\right)^2}}$

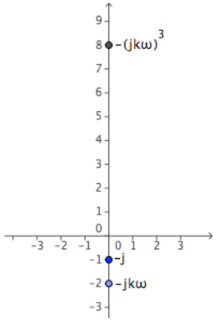
1)b) on met au cube: $|r(\omega)|=\dfrac{(\omega k)^3}{\left(1+\left(\dfrac{\omega}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

2) Argument de $H(\omega)$.

On s'occupe d'abord du haut:

voici $(-jk\omega)$ et $(-jk\omega)^3$:

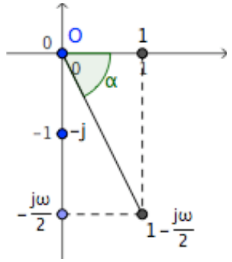
(on suppose toujours que $k>0$ et $\omega>0$)



L'argument de $(-jk\omega)^3$ est :

$$\arg\left((-jk\omega)^3\right)=3\arg(-jk\omega)=3\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\ \text{modulo } 2\pi.$$

On s'occupe maintenant du bas:



L'argument de $1-\dfrac{j\omega}{2}$ correspond à l'angle α sur la figure, qui vaut d'après les propriétés élémentaires des triangles rectangles:

$$\arg\left(1-\frac{j\omega}{2}\right)=-\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

D'où le résultat.

---

2)b) on pose donc $\varphi(\omega)=\dfrac{\pi}{2}+3\arctan\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$.

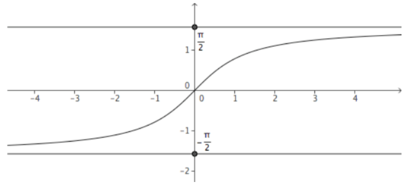
On a $\varphi'(\omega)=\left(\dfrac{\pi}{2}+3\arctan\left(\dfrac{\omega}{2}\right)\right)'=\left(3\arctan\left(\dfrac{\omega}{2}\right)\right)'=\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\omega}{2}\right)^2}$

car la dérivée de $\arctan(u)$ est $\dfrac{u'}{1+u^2}$. Donc $\forall\omega\in\mathbb{R},\ \varphi'(\omega)>0$.

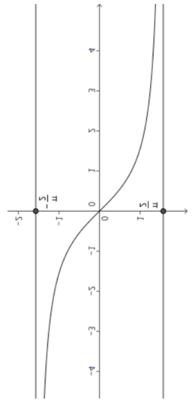
Mais il suffisait de dire que phi est croissante car la fonction artan l'est. En 0, on a $\lim\limits_{0}\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ et en $+\infty$, on a

$$\lim_{\omega\to+\infty}\varphi(\omega)=\frac{\pi}{2}+3\lim_{\omega\to+\infty}\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+3\frac{\pi}{2}=2\pi\ .$$

Petit rappel sur la fonction arctan:

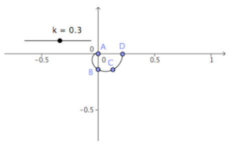


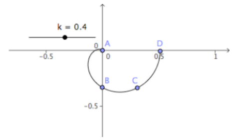
c'est la réciproque de la fonction tangente:

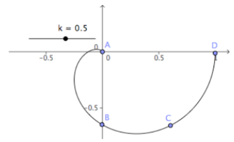


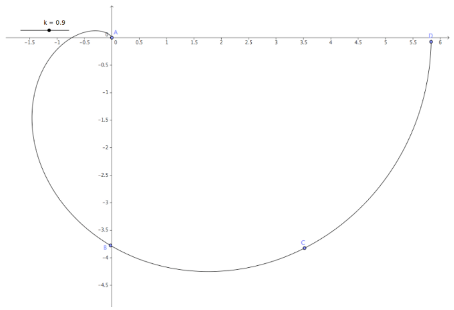
Conclusion: r croît de 0 à $8k^3$ et ω croît de $\frac{\pi}{2}$ à 2π, ce qu'on peut voir sur les graphiques suivants:

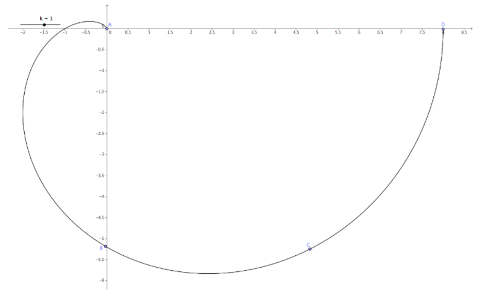
4)











$$\frac{(\omega k)^3}{\left(1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 1 \Leftrightarrow (wk)^2 = 1+\frac{w^2}{4} \Leftrightarrow \left(k^2-\frac{1}{4}\right)\omega^2 = 1$$