éléments de correction du BTS 2005

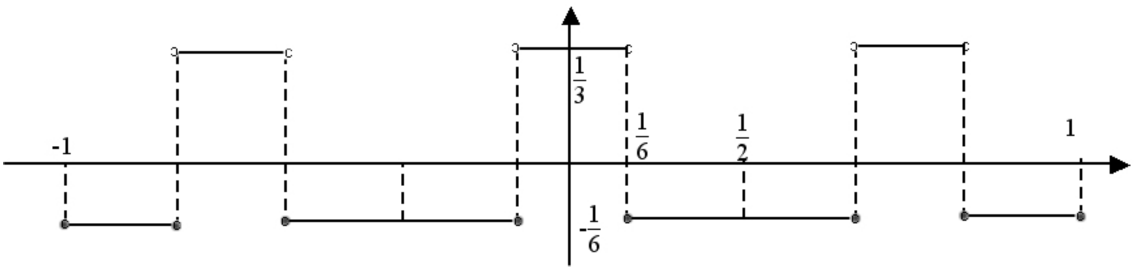
Elle n'est pas officielle et peut comporter des coquilles.

EXERCICE 1

1) a)$g'(t) = (0 + 2\cos t \sin t)\sin^2 t + (1 + \cos^2 t)2\sin t \cos t$
$= \sin t \cos t(2\sin^2 t + 2 + 2\cos^2 t) = 3\sin t \cos^3 t$ car $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

b) Sur $[0;\pi]$ on a : $\sin t \geq 0$ donc le signe de $g'(t)$ est le signe de $\cos t$. C'est à dire :
sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $g'(t) \geq 0$ donc g est croissante.
sur $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, $g'(t) \leq 0$ donc g est décroissante.

2) a)



b)On a : $a_0 = 2 \times \dfrac{1}{1}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt$ car f est une fonction paire.

$$a_0 = 2 \times \frac{1}{1}\left(\int_0^{\tau} \frac{1}{2} - \tau \quad dt + \int_{\tau}^{\frac{1}{2}} -\tau \quad dt\right) = 2 \times \tau \times (\frac{1}{2} - \tau) \quad + \quad 2 \times (\frac{1}{2} - \tau) \times -\tau = 0$$

Puis f étant paire, les coefficients b_n sont tous nuls

Enfin, $\omega = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$ donc pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $a_n = 2 \times \dfrac{2}{1}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\cos 2n\pi t dt$

$$a_n = 2 \times \frac{2}{1}\left(\int_0^{\tau}\left(\frac{1}{2} - \tau\right) \times \cos 2n\pi t dt + \int_{\tau}^{\frac{1}{2}} (-\tau) \times \cos 2n\pi t \quad dt\right)$$

$$a_n = 4\left((\frac{1}{2} - \tau)\left[\frac{\sin 2n\pi t}{2n\pi}\right]_0^{\tau} - \tau\left[\frac{\sin 2n\pi t}{2n\pi}\right]_{\tau}^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi}((\frac{1}{2} - \tau)(\sin 2n\pi\tau - 0) - \tau(0 - \sin 2n\pi)) = \frac{1}{n\pi}\sin 2n\pi\tau$$

Finalement le développement en série de fourier de la fonction f est :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\sin 2n\pi\tau \cos 2\pi n t$$

3)

a) La formule de Parseval donne : $E_h^2 = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$

donc ici : $E_h^2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{2}\dfrac{1}{n^2\pi^2}\sin^2 2n\pi\tau = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\sin^2 2\pi\tau}{\pi^2} + \dfrac{\sin^2 4\pi\tau}{4\pi^2}) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\sin^2 2\pi\tau}{\pi^2} + \dfrac{4\sin^2 2\pi\tau\cos^2 2\pi\tau}{4\pi^2})$

$$E_h^2 = \frac{1}{2\pi^2}\sin^2 2\pi\tau\left(1 + \cos^2 2\pi\tau\right) = \frac{1}{2\pi^2}g(2\pi\tau)$$

D'après ce qui précède, $g(t)$ atteint un maximum pour $t = \dfrac{\pi}{2}$, la valeur E_h^2 sera maximale pour $\tau = \dfrac{1}{4}$

CORRECTION DE L'EXERCICE 2

Partie A

1) a)

On résout l'équation homogène : $\dfrac{1}{200}y'(t) + y(t) = 0$

D'après le formulaire, les solutions sont les $y(t) = Ce^{-200t}$

Puis on cherche une solution constante. Si $y(t) = cste$ alors sa dérivée est nulle donc l'équation différentielle (1) devient : $0 + cste = 146$, une solution de l'équation complète est donc $y(t) = 146$

Finalement toutes les solutions de l'équation complète sont les $y(t) = Ce^{-200t}+146$ où C est une constante réelle.

b) Sachant que ω est une solution de (1), on a : $\omega(t) = Ce^{-200t} + 146$ puis sachant que $\omega(0) = 0$ on a : $150 = C + 146$ donc $C = 4$

Finalement, la solution de l'équation différentielle qui satisfait à la condition initiale est
$\omega(t) = 146 + 4e^{-200t}$

2) a)

$\omega_\infty = \lim\limits_{t \mapsto +\infty} \omega t = 146 + 0 = 146$ donc la différence $\omega(0) - \omega_\infty = 150 - 146 = 4$

b)

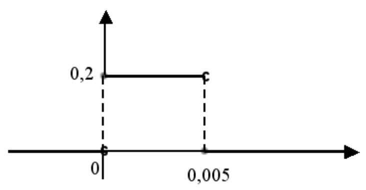
$\left|\dfrac{\omega(t) - \omega_\infty}{\omega_\infty}\right| = \dfrac{4e^{-200t}}{146}$

Résolvons $\dfrac{4e^{-200t}}{146} \leq 0,01$ on obtient : $-200t \leq \ell n\,\dfrac{1,46}{4}$ donc $t \geq \dfrac{-1}{200}\,\ell n\,\dfrac{1,46}{4}$

Le temps de stabilisation est : $\dfrac{-1}{200}\,\ell n\,\dfrac{1,46}{4} \approx 0,005\ s$

Partie B

1) a) Dessin



b) La transformée de Laplace de γ est $\Gamma(p) = \dfrac{K}{p}(1 - e^{-\tau p})$

2) On applique la transformation de Laplace aux deux membres de l'égalité

$\frac{1}{200}pF(p) + F(p) = \frac{K}{p}(1 - e^{-\tau p})$
donc $F(p) = \frac{K}{p}(1 - e^{-\tau p})(1 + \frac{p}{200})^{-1} = K\frac{200}{p(p+200)}(1 - e^{-\tau p})$

3) a)

En multipliant par p et faisant tendre p vers 0, on obtient $A = 1$
puis en multiplication par $p + 200$, et en faisant tendre p vers -200, on obtient $B = -1$
$F(p) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 200}\right) K(1 - e^{-\tau p})$

b)

$f(t) = K \times (U(t) - e^{-200t}U(t) - U(t - \tau) + e^{-200(t-\tau)}U(t - \tau))$
car $L^{-1}\left(\frac{1}{p + a}\right) = e^{-at}U(t)$ et $L^{-1}(F(p)e^{-ap}) = F(t - a)U(t - a)$
Si $t \in [0, \tau[$ alors $U(t) = 1$ et $U(t - \tau) = 0$ donc $f(t) = K \times (1 - e^{-200t})$
Si $t \in [\tau; +\infty[$ alors $U(t) = 1$ et $U(t - \tau) = 1$ donc $f(t) = K \times (1 - e^{-200t} - 1 + e^{-200(t-\tau)})$
$f(t) = K \times (-e^{-200t} + e^{-200t} \times e^{200\tau}) = K \times e^{-200t}(-1 + e^{200\tau}) = K(e^{200\tau} - 1)e^{-200t}$

c)

Sur l'intervalle $t \in [0, \tau[$ on a : $f'(t) = 200Ke^{-200t} \geq 0$ donc la fonction f est croissante sur cet intervalle.
Sur l'intervalle $t \in [\tau, +\infty[$ on a : $f'(t) = -200K\left(e^{200\tau} - 1\right)e^{-200t} \leq 0$ donc la fonction f est décroissante sur cet intervalle.

Limites
$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ et $\lim_{t\to 0} f(t) = K$

d) Dessin