SESSION 2005

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

SPECIALITES	COEF.	DUREE
CONTROLE INDUSTRIEL ET REGULATION AUTOMATIQUE	2	3
ELECTRONIQUE	2	3
ELECTROTECHNIQUE	1	3
GENIE OPTIQUE	3	3
TECHNIQUES PHYSIQUES POUR L'INDUSTRIE ET LE LABORATOIRE	3	3

MATHEMATIQUES

Le sujet comprend 4 pages, numérotées de 1/4 à 4/4.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 7 pages, numérotées de 1 à 7.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Code sujet : MATGRA1

EXERCICE 1 (*9 points*)

1. Soit la fonction numérique g définie sur $[\,0\,;\pi\,]$ par $g(t)=\left(1+\cos^2 t\right)\sin^2 t$.

a) Montrer que $g'(t)=4\sin t\cos^3 t$.

b) En déduire les variations de g sur $[\,0\,;\pi\,]$.

2. Soit la fonction numérique f définie sur R, paire, périodique de période 1 telle que :

$$\begin{cases} f(t)=\dfrac{1}{2}-\tau & \text{si } 0\le t<\tau \\ f(t)=-\tau & \text{si } \tau\le t\le\dfrac{1}{2} \end{cases}$$ où τ est un nombre réel tel que $0<\tau<\dfrac{1}{2}$.

a) **Uniquement dans cette question**, on prendra $\tau=\dfrac{1}{6}$.

Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-1\,;1\,]$ dans un repère orthonormal.

b) On admet que la fonction f satisfait aux conditions de Dirichlet.

Soit S le développement en série de Fourier associé à la fonction f.

Montrer que :

$$S(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\,\pi}\sin(2n\,\pi\tau)\cos(2n\,\pi t).$$

3. On décide de ne conserver que les harmoniques de rang inférieur ou égal à 2.

Soit la fonction numérique h définie sur R par :

$$h(t)=\frac{1}{\pi}\sin(2\pi\tau)\cos(2\pi t)+\frac{1}{2\,\pi}\sin(4\pi\tau)\cos(4\pi t).$$

On désigne par E_h^2 le carré de la valeur efficace de h sur une période.

a) À l'aide de la formule de Parseval, déterminer E_h^2.

b) Montrer que $E_h^2=\dfrac{1}{2\,\pi^2}g(2\pi\tau)$.

4. Déterminer la valeur de τ rendant E_h^2 maximal.

EXERCICE 2 (*11 points*)

L'exercice est composé de deux parties qui peuvent se traiter de façon indépendante.

Partie A

Un embrayage vient appliquer, à l'instant $t = 0$, un couple résistant constant sur un moteur dont la vitesse à vide est de 150 rad/s.
On note $\omega(t)$ la vitesse de rotation du moteur à l'instant t.

La fonction ω est solution de l'équation différentielle : $\frac{1}{200}y'(t) + y(t) = 146$ **(1)**,
où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle positive t.

1. a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle **(1)**.
On cherchera une solution particulière constante.

b) Sachant que $\omega(0) = 150$, montrer que $\omega(t) = 146 + 4e^{-200\,t}$ pour tout $t \in [0, +\infty[$.

2. a) On note $\omega_\infty = \lim\limits_{t \to +\infty} \omega(t)$. Déterminer la perte de vitesse $\omega(0) - \omega_\infty$ due au couple résistant.

b) On considère que la vitesse du moteur est stabilisée lorsque l'écart relatif $\left|\frac{\omega(t) - \omega_\infty}{\omega_\infty}\right|$ est inférieur à 1%.
Calculer le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse.
On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au millième.

Partie B

La vitesse du moteur étant stabilisée, on s'intéresse dans cette deuxième partie à l'effet d'une perturbation γ du couple résistant sur la vitesse de rotation du moteur.
On note $f(t)$ la différence, à l'instant t, entre la vitesse perturbée du moteur et sa vitesse stabilisée.
La fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{200}f'(t) + f(t) = \gamma(t) \text{ avec } f(0^+) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

On admet que la fonction f possède une transformée de Laplace notée F.
La fonction γ est définie par $\gamma(t) = K[U(t) - U(t - \tau)]$ où τ et K sont des réels strictement positifs caractérisant la perturbation et U est la fonction échelon unité ($U(t) = 0$ si $t < 0$ et $U(t) = 1$ si $t \geq 0$).

1. a) Représenter la fonction γ pour $\tau = 0{,}005$ et $K = 0{,}2$.

b) Déterminer, en fonction de τ et K, la transformée de Laplace Γ de la fonction γ.

2. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle **(2)**, déterminer $F(p)$.

3. **a)** Déterminer les réels a et b tels que $\dfrac{200}{p(p+200)} = \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{p+200}$ pour tout réel p strictement positif.

b) En déduire l'original f de la fonction F. On vérifiera notamment que :

$$\begin{cases} f(t) = K\left(1-\mathrm{e}^{-200t}\right) & \text{si } t \in [0,\tau[\\ f(t) = K\left(\mathrm{e}^{200\tau}-1\right)\mathrm{e}^{-200t} & \text{si } t \in [\tau,+\infty[\end{cases}.$$

c) Donner le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles $[0,\tau[$ et $[\tau,+\infty[$.
Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de ces deux intervalles.

d) Représenter la fonction f pour $\tau = 0{,}005$ et $K = 0{,}2$.
On pourra tracer les courbes représentatives des fonctions γ et f dans le même repère.