PARTIE MÉCANIQUE, THERMODYNAMIQUE ET CHIMIE (durée conseillée 1 h 15 min)

LA MESURE DU TEMPS

Depuis toujours, l'homme a cherché à se repérer dans le temps. Il a d'abord découpé le temps en années, mois et jours en observant les conséquences des mouvements de la Terre autour du Soleil, de la Lune autour de la Terre (de période environ égale à 1 mois) et de la Terre sur elle-même.
Ensuite pour découper le jour en heures, l'homme utilisa les cadrans solaires et les clepsydres. Les clepsydres ont l'avantage de pouvoir indiquer l'heure même en l'absence de Soleil (le jour lorsque le ciel est couvert et la nuit).

Partie 1 : Les clepsydres

La plus vieille clepsydre connue à ce jour a été retrouvée en Egypte à Karnak et remonte au XVème siècle avant J.-C. Sa forme est en tronc de cône et sa hauteur est de 36 cm (**figure 5**).

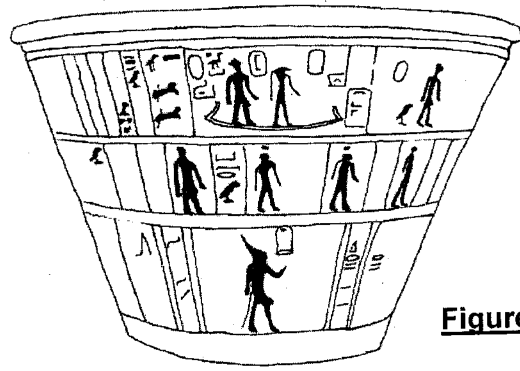

Figure 5

La surface interne de la clepsydre est graduée en douze traits équidistants du fond du réservoir à une ligne peinte marquant le niveau de remplissage. Le but est d'étudier le principe de cette clepsydre.

Nous allons commencer par étudier la vidange d'un réservoir cylindrique (**figure 6**).

On considère un réservoir cylindrique de diamètre D = 0,890 m dont le fond est muni d'un orifice circulaire de diamètre d = 3,00 mm initialement bouché. Celui-ci est rempli d'eau jusqu'à une hauteur H = 1,20 m.

Lorsqu'à t = 0, on enlève le bouchon de l'orifice, l'eau s'écoule.

On donne :
l'intensité du champ de pesanteur : $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$,
la pression atmosphérique : $P_0 = 1{,}00$ bar.
1 bar = 10^5 Pa.

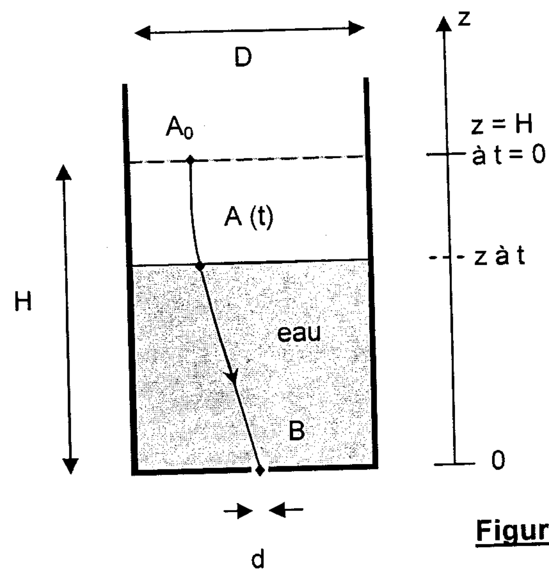

Figure 6

1.1 - On donne l'expression de l'énergie mécanique massique d'un fluide de masse volumique ρ constante en écoulement :

$$e = \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + g\,.\,z \quad (J.kg^{-1}) \text{ avec } \begin{cases} v : \text{vitesse d'écoulement du fluide } (m.s^{-1}) \\ z : \text{altitude du fluide (m)} \\ P : \text{pression du fluide (Pa)} \end{cases}$$

À partir du schéma, donner les altitudes des points A et B à la date t quelconque.
Quelles sont les valeurs des pressions en A et B ?
En négligeant les pertes de charge, appliquer la conservation de l'énergie mécanique entre les points A et B afin d'obtenir une relation entre z, g, v_A et v_B.

1.2 - Quelle relation existe-t-il entre les débits volumiques q_{VA} et q_{VB} aux points A et B ? En explicitant ces débits en fonction des sections et vitesses d'écoulement, déduire l'expression de : $\frac{v_A^2}{v_B^2}$ en fonction de d et D.

Calculer ce rapport.

Peut-on négliger v_A^2 par rapport à v_B^2 ?

1.3 - En déduire l'expression de la vitesse v_B de l'eau à travers l'orifice du fond en fonction de z et g.

1.4 - Donner l'expression du débit volumique de vidange q_V en fonction de z et du diamètre d de l'orifice du fond. On négligera le phénomène de contraction de débit.

1.5 - Pour un réservoir de section constante, on montre que le temps écoulé entre deux hauteurs z_i et z_f est donné par la relation suivante :

$$t = \frac{S_R}{s_o}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{z_i} - \sqrt{z_f}\right) \text{ avec } \begin{cases} t : \text{temps écoulé (s)} \\ S_R : \text{section du réservoir } (m^2) \\ s_o : \text{section de l'orifice } (m^2) \end{cases}$$

On donne le tableau suivant pour le réservoir cylindrique :

z_i (m)	1,20	1,10	1,00	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10
z_f (m)	1,10	1,00	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,00
t (min)	31	32	34	36	38	41	45	49	56	67		210

1.5.1 - Calculer la durée t (en minutes) manquante dans le tableau précédent.

1.5.2 - Calculer la durée T de vidange complète pour vider entièrement le réservoir. Exprimer cette durée en heures et minutes.

1.5.3 - Peut-on graduer en heures le réservoir avec 12 intervalles équidistants entre le fond et la hauteur de remplissage H = 1,20 m ? Justifier à l'aide du tableau ci-dessus.

1.6 -

Afin de palier le problème rencontré avec le réservoir cylindrique, on doit utiliser un réservoir de forme courbe.

Dans un repère cylindrique, la paroi du réservoir satisfait à l'équation suivante : $z = Ar^4$ où A est une constante (**figure 7**).

Dans ce cas là, on montre qu'il existe une relation de proportionnalité entre le temps écoulé et la différence de hauteur $(z_i - z_f)$ s'écrivant :

$$t = \frac{\pi}{s_o\sqrt{2\,gA}}(z_i - z_f)$$

où: s_o est la section de l'orifice (en m^2) et t est le temps écoulé (en s).

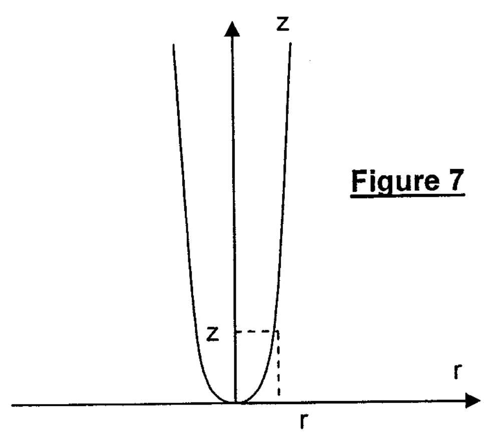

Figure 7

Sachant que la hauteur de remplissage de la clepsydre est H = 30,0 cm, calculer le diamètre de l'orifice circulaire au fond du réservoir pour que le temps de vidange soit de 12 heures. On prend $A = 1\ m^{-3}$.

Partie 2 : Le pendule simple

Une horloge a besoin pour réguler son mouvement d'un dispositif oscillant dont le mouvement se reproduit sans cesse identique à lui-même. C'est ce qui assure un découpage régulier du temps.
Nous allons nous intéresser au pendule simple.

Il est constitué d'un fil, de longueur L, auquel est attaché un objet de masse m (**figure 8**).
Soit θ l'angle entre le pendule et la verticale.
On négligera la masse du fil ainsi que les frottements.
On utilisera le repère de Frenet défini par les vecteurs unitaires $\left(\vec{e_t}, \vec{e_n}\right)$ (voir schéma ci-contre).

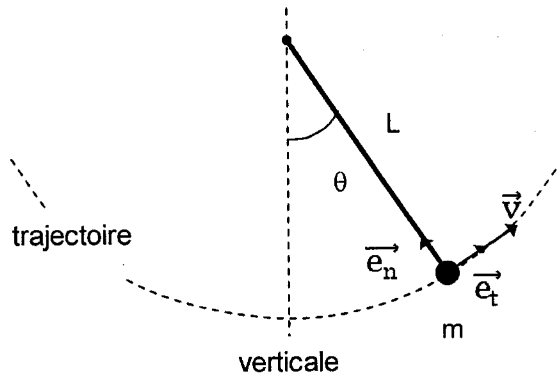

Figure 8

2.1 - Faire un bilan des forces appliquées à l'objet de masse m. Représenter ces forces sur un schéma.

2.2 - À l'aide du schéma précédent, montrer que le poids de l'objet s'écrit :

$$\vec{P} = -\,mg\,.\left(\sin\theta\,.\,\vec{e_t} + \cos\theta\,.\,\vec{e_n}\right).$$

2.3 - On donne l'expression de l'accélération dans le repère de Frenet pour un mouvement circulaire :

$$\vec{a} = L\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e_t} + \frac{v^2}{L}\vec{e_n}.$$

En appliquant la 2ème loi de Newton (principe fondamental de la dynamique) à l'objet de masse m, montrer que l'équation différentielle du mouvement du pendule s'écrit ainsi : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$.

2.4 - Quelle hypothèse supplémentaire permet de réécrire cette équation sous la forme $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$?

2.5 - La solution générale de cette équation différentielle est alors de la forme : $\theta = \theta_0\cos(\omega_0 . t + \varphi)$.
En déduire l'expression de ω_0 et celle de la période T_0 du pendule.

2.6 - Quelle doit être la longueur L pour que le pendule batte la seconde c'est-à-dire qu'il effectue un aller simple en 1,00 seconde, donc un aller-retour en 2,00 secondes ? On prendra $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$ (valeur à Paris).

2.7 - En 1671, Jean Picard avait proposé de prendre cette longueur comme unité de longueur officielle et internationale. Le problème est que cette valeur varie selon qu'on effectue l'expérience à l'équateur, à Paris ou proche des pôles de la Terre. Comment peut-on expliquer cette variation ?